Limites e Derivação de Séries de Funções

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

12 de julho de 2010

Teorema 1. *Sejam $u_1, u_2 \ldots : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciáveis. Seja $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

Se

$$\left| \frac{du_n}{dx}(x) \right| \leq a_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

para $x \in [a,b]$ e

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty,$$

então

$$\frac{du}{dx}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n}{dx}(x),$$

para $x \in [a,b]$.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Sejam

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n}{dx}(x).$$

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x)$$

$$q_N(x,h) = \frac{S_N(x) - S_N(x+h)}{h}$$

$$q(x,h) = \frac{u(x) - u(x+h)}{h}.$$

Existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $M, N > N_0$ implica $\sum_{n=M}^{N} a_n < \frac{\epsilon}{3}$. Então

$$|S'_N(x) - S'_M(x)| = \left| \sum_{n=M}^{N} \frac{du_n}{dx}(x) \right| \leq \sum_{n=M}^{N} \left| \frac{du_n}{dx}(x) \right| \leq \sum_{n=M}^{N} a_n < \frac{\epsilon}{3}, \tag{1}$$

para todo $x \in [a,b]$. Deixando N fixo e passando ao limite quando M tende a infinito obtemos

$$|S'_N(x) - g(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}. \tag{2}$$

Sejam $M, N > N_0$. Pelo Teorema do Valor Médio aplicado a $S_N(x) - S_M(x)$ e por (1) obtemos que existe ξ entre x e $x+h$ tal que

$$|q_N(x,h) - q_M(x,h)| = |S'_N(\xi) - S'_M(\xi)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Deixando N fixo e passando ao limite quando M tende a infinito obtemos

$$|q_N(x,h) - q(x,h)| \leq \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{para todo } h \text{ tal que } x+h \in [a,b]. \tag{3}$$

Como $\lim_{h\to 0} q_N(x,h) = S'_N(x)$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < h < \delta$ implica que

$$|q_N(x,h) - S'_N(x)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{4}$$

De (3), (4) e (2) segue-se que

$$\begin{aligned} &|q(x,h) - g(x)| \\ &\qquad \leq |q(x,h) - q_N(x,h)| + |q_N(x,h) - S'_N(x)| + |S'_N(x) - g(x)| \\ &\qquad\qquad < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

□

Teorema 2. *Sejam* $u_1, u_2 \ldots : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$*. Seja* $u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

Se

$$|u_n(x)| \leq a_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

para $x \in [a,b]$ *e*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty,$$

então

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \longrightarrow x_0} u_n(x),$$

para $x_0 \in [a,b]$ *tal que existam* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} u_n(x)$.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Sejam

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x)$$

$$L_n = \lim_{x \to x_0} u_n(x)$$

$$\tilde{S}_N = \sum_{n=1}^{N} L_n$$

Existe $L = \sum_{n=1}^{\infty} L_n$, pois $|L_n| \leq a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.
Logo existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $N > N_0$ temos que

$$|L - \tilde{S}_N| = |L - \sum_{n=1}^{N} L_n| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{5}$$

Também existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $M, N > N_1$ implica $\sum_{n=M}^{N} a_n < \frac{\epsilon}{3}$. Então

$$|S_N(x) - S_M(x)| = \left| \sum_{n=M}^{N} u_n(x) \right| \leq \sum_{n=M}^{N} |u_n(x)| \leq \sum_{n=M}^{N} a_n < \frac{\epsilon}{3}, \tag{6}$$

para todo $x \in [a, b]$. Deixando N fixo e passando ao limite quando M tende a infinito obtemos

$$|S_N(x) - u(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{para todo } x \in [a, b]. \tag{7}$$

Seja $N > \max\{N_0, N_1\}$. Como $\lim_{x \to x_0} S_N(x) = \tilde{S}_N$, então existe $\delta > 0$ tal que para $|x - x_0| < \delta$,

$$|\tilde{S}_N - S_N(x)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{8}$$

De (5), (8) e (6) segue-se que

$$|L - u(x)| \leq |L - \tilde{S}_N| + |\tilde{S}_N - S_N(x)| + |S_N(x) - u(x)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}$$

$\square$

Exemplo 1. Vamos mostrar que a série

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}. \tag{9}$$

com coeficientes dados por

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \ n = 1, 2, 3 \ldots \tag{10}$$

para uma função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ contínua por partes, tal que a sua derivada também é contínua por partes, satisfaz a equação do calor.

Como cada termo da série satisfaz a equação do calor, basta provarmos que podemos passar as derivadas para dentro do sinal de somatório. Isto decorre da aplicação do Teorema 1 na página 1 usando o fato de que

$$\left| c_n \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) \right| \le M \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t_1}$$

$$\left| c_n \frac{\partial u_n}{\partial x}(x,t) \right| \le M \frac{n\pi}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t_1}$$

$$\left| c_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,t) \right| \le M \frac{n^2 \pi^2}{L^2} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t_1}$$

para $M = \frac{2}{L} \int_0^L |f(x)| dx, \ 0 < t_1 \le t \le t_2, \ 0 < x_1 \le x \le x_2 < L, \ n = 1, 2, 3, \ldots$ e que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t_1} < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t_1} < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t_1} < \infty.$$

Decorre da aplicação do Teorema 2 na página 3, usando o fato de que

$$|c_n u_n(x,t)| \le M e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t_1}$$

para $0 < t_1 \le t \le t_2, \ n = 1, 2, 3, \ldots$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t_1} < \infty,$$

que

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\lim_{t\to\infty} u_n(x,t) \right) = 0, \quad \text{para } x \in [0,L].$$

Exemplo 2. Vamos mostrar que a série

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b}. \tag{11}$$

com coeficientes dados por

$$c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy, \; n = 1,2,3\ldots \tag{12}$$

para uma função $k : [0,b] \to \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada k' também seja contínua por partes, é solução da equação de Laplace.

Cada termo da série satisfaz a equação de Laplace. Basta provarmos que podemos passar as derivadas para dentro do sinal de somatório. Isto decorre da aplicação do Teorema 1 na página 1 usando o fato de que

$$\left| c_n \frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y) \right| \leq M \frac{n\pi}{b} \frac{e^{-\frac{n\pi(a-x_1)}{b}}}{1 - e^{-\frac{2\pi a}{b}}}$$

$$\left| c_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,y) \right| \leq M \frac{n^2\pi^2}{b^2} \frac{e^{-\frac{n\pi(a-x_1)}{b}}}{1 - e^{-\frac{2\pi a}{b}}}$$

$$\left| c_n \frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y) \right| \leq M \frac{n\pi}{b} \frac{e^{-\frac{n\pi(a-x_1)}{b}}}{1 - e^{-\frac{2\pi a}{b}}}$$

$$\left| c_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}(x,y) \right| \leq M \frac{n^2\pi^2}{b^2} \frac{e^{-\frac{n\pi(a-x_1)}{b}}}{1 - e^{-\frac{2\pi a}{b}}}$$

para $M = \frac{2}{b} \int_0^b |k(y)| dy$, $0 < x_1 \leq x \leq x_2 < a$, $0 < y_1 \leq y \leq y_2 < b$, $n = 1,2,3,\ldots$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} e^{-\frac{n\pi(a-x_1)}{b}} < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{b^2} e^{-\frac{n\pi(a-x_1)}{b}} < \infty.$$

Referências

[1] William E. Boyce and Richard C. DiPrima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 7a. edition, 2002.

[2] Djairo Guedes de Figueiredo. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[3] Donald Kreider, Donald R. Ostberg, Robert C. Kuller, and Fred W. Perkins. *Introdução à Análise Linear*. Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1972.

[4] Erwin Kreiszig. *Matemática Superior*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2a. edition, 1985.

[5] Elon L. Lima. *Curso de Análise*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1976.