Corda Elástica Presa Somente em uma das Extremidades

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

5 de outubro de 2010

Vamos determinar o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto de uma corda elástica de comprimento L presa somente na extremidade esquerda, sabendo-se que o deslocamento inicial de cada ponto da corda é dado por $f(x)$, e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é dada por $g(x)$, ou seja, vamos resolver o PVIF

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

A solução deste problema é a soma da solução do problema com deslocamento inicial nulo ($f(x) = 0$),

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

com a solução do problema com velocidade inicial nula ($g(x) = 0$),

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0. \end{cases}$$

Vamos resolver o problema com $g(x) = 0$ e deixamos como exercício para o leitor o problema com $f(x) = 0$.

Vamos determinar o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto de uma corda elástica de comprimento L presa somente na extremidade esquerda, sabendo-se que o deslocamento inicial de cada ponto da corda é dado por $f(x)$, e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é nula, ou seja, vamos resolver (PVIF)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0,\ X'(L) = 0 & (1) \\ T''(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0,\ T'(0) = 0 & (2) \end{cases}$$

As condições $X(0) = X'(L) = 0$ decorrem do fato de que $0 = u(0,t) = X(0)T(t)$ e $0 = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = X'(L)T(t)$. A condição $T'(0) = 0$, decorre do fato de que a velocidade inicial é nula, ou seja,

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = X(x)T'(0).$$

A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$**:** $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$.

Se $\lambda = 0$**:** $X(x) = c_1 + c_2 x$.

Se $\lambda < 0$**:** $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

As condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X'(L) = 0$ implicam que (1) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda < 0$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, a equação o problema de valores de fronteira (1) tem soluções fundamentais

$$X_{2n+1}(x) = \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$ na equação diferencial (2) obtemos

$$T''(t) + \frac{a^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2} T(t) = 0$$

que com a condição inicial $T'(0) = 0$ tem soluções fundamentais (verifique!)

$$T_{2n+1}(t) = \cos \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}$$

Logo o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 0, \; \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0; \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \; 0 < x < L \end{cases} \tag{3}$$

tem **soluções fundamentais**

$$u_{2n+1}(x,t) = X_{2n+1}(x) T_{2n+1}(t) = \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \cos \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}, \tag{4}$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Vamos supor que a solução do PVIF seja a série

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} u_{2n+1}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \cos \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}. \tag{5}$$

Então para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que impor a condição

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}.$$

Esta não é a série de Fourier de senos de $f(x)$ de período L. Entretanto, estendendo f ao intervalo $[0,2L]$ de forma que ela seja simétrica em relação a reta $x = L$, ou seja,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0,L] \\ f(2L-x) & \text{se } x \in [L,2L] \end{cases}$$

então

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}. \tag{6}$$

Assim, se a função $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_{2n+1} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}\, dx, \quad \text{para } n = 0,1,2,3\ldots \tag{7}$$

Para cada n, podemos reescrever a solução fundamental (4) do problema (3) na forma (verifique!)

$$\begin{aligned} u_{2n+1}(x,t) &= \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \cos \frac{a(2n+1)\pi t}{2L} \\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi(x-at)}{2L} + \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi(x+at)}{2L} \right). \end{aligned}$$

Substituindo-se esta expressão na série (6) obtemos que a solução do problema de valor inicial e de fronteira pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi(x-at)}{2L} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi(x+at)}{2L} \right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\hat{f}(x-at) + \hat{f}(x+at) \right), \end{aligned} \tag{8}$$

em que $\hat{f}$ é a extensão de f que é ímpar, simétrica em relação a reta $x = L$ e periódica de período $4L$. Esta é a **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial e de fronteira. A solução representa duas ondas se propagando em sentidos opostos com velocidade igual a a. Observe que o fato de $\hat{f}$ ser ímpar implica que as ondas se refletem em $x = 0$.

Deixamos como exercício para o leitor verificar que se f é contínua por partes com as suas derivadas, f' e f'', também contínua por partes, então para (x,t) tal que $\tilde{f}''$ é contínua em $x - at$ e $x + at$ temos que $u(x,t)$ dado pela solução de d'Alembert, (24), satisfaz a equação da onda e $u(x,0) = f(x)$ para todo $x \in [0,L]$.

Exercícios

1. Determine o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto de uma corda elástica de comprimento L presa somente na extremidade *esquerda*, sabendo-se que o deslocamento inicial da corda é nulo e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é dada por $g(x)$, ou seja, resolva o PVIF

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0, \; \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \; 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \; \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0. \end{cases}$$

2. Determine o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto de uma corda elástica de comprimento L presa somente na extremidade *esquerda*, sabendo-se que o deslocamento inicial de cada ponto da corda é dado por $f(x)$, e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é dada por $g(x)$, ou seja, resolva o PVIF

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \; \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \; 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \; \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0. \end{cases}$$

3. Determine o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto de uma corda elástica de comprimento L presa somente na extremidade *direita*, sabendo-se que o deslocamento inicial de cada ponto da corda é dado por $f(x)$, e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é nula, ou seja, resolva o PVIF

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \; \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \; 0 < x < L \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0; \; u(L,t) = 0. \end{cases}$$

4. Determine o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto de uma corda elástica de comprimento L presa somente na extremidade *direita*, sabendo-se que o deslocamento inicial da corda é nulo e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é dada por $g(x)$, ou seja, resolva o PVIF

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 < x < L \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0;\ u(L,t) = 0. \end{cases}$$

5. Determine o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto de uma corda elástica de comprimento L presa somente na extremidade *direita*, sabendo-se que o deslocamento inicial da corda é nulo e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é dada por $g(x)$, ou seja, resolva o PVIF

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 < x < L \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0;\ u(L,t) = 0. \end{cases}$$

Respostas dos Exercícios

1. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \; X'(L) = 0 & (9) \\ T''(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0, \; T(0) = 0 & (10) \end{cases}$$

A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = c_1 + c_2 x$.

Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

As condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X'(L) = 0$ implicam que (1) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda < 0$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, a equação o problema de valores de fronteira (9) tem soluções fundamentais

$$X_{2n+1}(x) = \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{2L}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$ na equação diferencial (10) obtemos

$$T''(t) + \frac{a^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}T(t) = 0$$

que com a condição inicial $T(0) = 0$ tem soluções fundamentais (verifique!)

$$T_{2n+1}(t) = \operatorname{sen}\frac{a(2n+1)\pi t}{2L}$$

Logo o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 0, \; \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0; \quad u(x,0) = 0, \; 0 < x < L \end{cases} \qquad (11)$$

tem **soluções fundamentais**

$$u_{2n+1}(x,t) = X_{2n+1}(x)T_{2n+1}(t) = \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\operatorname{sen}\frac{a(2n+1)\pi t}{2L} \tag{12}$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Vamos supor que a solução do PVIF seja a série

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}u_{2n+1}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\operatorname{sen}\frac{a(2n+1)\pi t}{2L}. \tag{13}$$

Então para satisfazer a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$, temos que impor a condição

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}\frac{a(2n+1)\pi}{2L}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{2L}.$$

Esta não é a série de Fourier de senos de $g(x)$ de período L. Entretanto, estendendo g ao intervalo $[0,2L]$ de forma que ela seja simétrica em relação a reta $x = L$, ou seja,

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in [0,L] \\ g(2L-x) & \text{se } x \in [L,2L] \end{cases}$$

então

$$\tilde{g}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}\frac{a(2n+1)\pi}{2L}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{2L}. \tag{14}$$

Assim, se a função $g : [0,L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada g' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$\frac{a(2n+1)\pi}{2L}c_{2n+1} = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\,dx. \tag{15}$$

para $n = 0, 1, 2, 3\ldots$

Para cada n, podemos reescrever a solução fundamental (12) do problema (11) na forma (verifique!)

$$\begin{aligned} u_{2n+1}(x,t) &= \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\operatorname{sen}\frac{a(2n+1)\pi t}{2L} \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{(2n+1)\pi(x-at)}{2L} - \cos\frac{(2n+1)\pi(x+at)}{2L}\right). \end{aligned}$$

Por outro lado, supondo que a série de Fourier da integral de g é a série das integrais, integrando-se (14), obtemos

$$\int_{x-at}^{x+at}\hat{g}(y)dy = a\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(\cos\frac{(2n+1)\pi(x-at)}{2L} - \cos\frac{(2n+1)\pi(x+at)}{2L}\right).$$

em que $\hat{g}$ é a extensão de g que é ímpar, simétrica em relação a reta $x = L$ e periódica de período $4L$.Logo temos que

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\hat{g}(y)dy. \tag{16}$$

A solução dada desta forma é chamada **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial e de fronteira.

2. A solução deste problema é a soma da solução do problema com apenas $f(x)$ não nula, que vamos denotar por $u^{(f)}(x,t)$, com a solução do problema com apenas $g(x)$ não nula, $u^{(g)}(x,t)$, ou seja,

$$u(x,t) = u^{(f)}(x,t) + u^{(g)}(x,t).$$

Logo a solução é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(x-at) + \hat{f}(x+at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \hat{g}(y)dy$$

em que $\hat{f}$ é a extensão de f que é ímpar, simétrica em relação a reta $x = L$ e periódica de período $4L$ e $\hat{g}$ é a extensão de g que é ímpar, simétrica em relação a reta $x = L$ e periódica de período $4L$. A solução dada desta forma é chamada **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial e de fronteira.

3. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$a^2X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \; X(L) = 0 & (17) \\ T''(t) - \alpha^2\lambda T(t) = 0, \; T'(0) = 0 & (18) \end{cases}$$

A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = c_1 + c_2 x$.

Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2\cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

As condições de fronteira $X'(0) = 0$ e $X(L) = 0$ implicam que (17) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda < 0$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, a equação o problema de valores de fronteira (17) tem soluções fundamentais

$$X_{2n+1}(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$ na equação diferencial (18) obtemos

$$T''(t) + \frac{a^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}T(t) = 0$$

que com a condição inicial $T'(0) = 0$ tem soluções fundamentais

$$T_{2n+1}(t) = \cos\frac{a(2n+1)\pi t}{2L}$$

Logo o problema

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ 0 < x < L \end{array}\right. \tag{19}$$

tem **soluções fundamentais**

$$u_{2n+1}(x,t) = X_{2n+1}(x)T_{2n+1}(t) = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\cos\frac{a(2n+1)\pi t}{2L}, \tag{20}$$

para n=0,1,2,3,...

Vamos supor que a solução do PVIF seja a série

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} u_{2n+1}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\cos\frac{a(2n+1)\pi t}{2L}. \tag{21}$$

Então para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que impor a condição

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}.$$

Esta não é a série de Fourier de cossenos de $f(x)$ de período L. Entretanto, estendendo f ao intervalo $[0,2L]$ de forma que ela seja simétrica em relação ao ponto $(x,y) = (L,0)$, ou seja,

$$\tilde{f}(x) = \left\{\begin{array}{cl} f(x) & \text{se } x \in [0,L] \\ -f(2L-x) & \text{se } x \in [L,2L] \end{array}\right.$$

então

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}. \tag{22}$$

Assim, se a função $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_{2n+1} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\,dx, \quad \text{para } n = 0,1,2,3\ldots \tag{23}$$

Para cada n, podemos reescrever a solução fundamental (4) do problema (3) na forma (verifique!)

$$\begin{aligned} u_{2n+1}(x,t) &= \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\cos\frac{a(2n+1)\pi t}{2L} \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{(2n+1)\pi(x-at)}{2L} + \cos\frac{(2n+1)\pi(x+at)}{2L}\right). \end{aligned}$$

Substituindo-se esta expressão na série (22) obtemos que a solução do problema de valor inicial e de fronteira pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi(x-at)}{2L} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi(x+at)}{2L}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\hat{f}(x-at) + \hat{f}(x+at)\right), \end{aligned} \tag{24}$$

em que $\hat{f}$ é a extensão de f que é par, simétrica em relação ao ponto $(x,y) = (L,0)$ e periódica de período $4L$. Esta é a **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial e de fronteira. A solução representa duas ondas se propagando em sentidos opostos com velocidade igual a a. Observe que o fato de que $\hat{f}$ é simétrica em relação ao ponto $(x,y) = (L,0)$ implica que as ondas se refletem em $x = L$.

4. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0,\ X(L) = 0 & (25) \\ T''(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0,\ T(0) = 0 & (26) \end{cases}$$

A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\, x}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = c_1 + c_2 x$.

Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

As condições de fronteira $X'(0) = 0$ e $X(L) = 0$ implicam que (25) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda < 0$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2},\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, a equação o problema de valores de fronteira (25) tem soluções fundamentais

$$X_{2n+1}(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L},\ \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$ na equação diferencial (26) obtemos

$$T''(t) + \frac{a^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}T(t) = 0$$

que com a condição inicial $T(0) = 0$ tem soluções fundamentais (verifique!)

$$T_{2n+1}(t) = \operatorname{sen}\frac{a(2n+1)\pi t}{2L}$$

Logo o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0;\ u(L,t) = 0, \quad u(x,0) = 0,\ 0 < x < L \end{cases} \tag{27}$$

tem **soluções fundamentais**

$$u_{2n+1}(x,t) = X_{2n+1}(x)T_{2n+1}(t) = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\operatorname{sen}\frac{a(2n+1)\pi t}{2L}, \tag{28}$$

para $n = 0,1,2,3,\ldots$

Vamos supor que a solução do PVIF seja a série

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}u_{2n+1}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\operatorname{sen}\frac{a(2n+1)\pi t}{2L}. \tag{29}$$

Então para satisfazer a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$, temos que impor a condição

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}\frac{a(2n+1)\pi}{2L}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}.$$

Esta não é a série de Fourier de cossenos de $g(x)$ de período L. Entretanto, estendendo g ao intervalo $[0,2L]$ de forma que ela seja simétrica em relação ao ponto $(x,y) = (L,0)$, ou seja,

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in [0,L] \\ -g(2L-x) & \text{se } x \in [L,2L] \end{cases}$$

então

$$\tilde{g}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}\frac{a(2n+1)\pi}{2L}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}. \tag{30}$$

Assim, se a função $g : [0,L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada g' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$\frac{a(2n+1)\pi}{2L}c_{2n+1} = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\,dx, \quad \text{para } n = 0,1,2,3,\ldots \tag{31}$$

Para cada n, podemos reescrever a solução fundamental (28) do problema (27) na forma

$$\begin{aligned} u_{2n+1}(x,t) &= \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\operatorname{sen}\frac{a(2n+1)\pi t}{2L} \\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi(x+at)}{2L} - \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi(x-at)}{2L}\right). \end{aligned}$$

Por outro lado, supondo que a série de Fourier da integral de g é a série das integrais, integrando-se (30), obtemos

$$\int_{x-at}^{x+at}\hat{g}(y)dy = a\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi(x+at)}{2L} - \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi(x-at)}{2L}\right).$$

em que $\hat{g}$ é a extensão de g que é par, simétrica em relação em relação ao ponto $(x,y) = (L,0)$ e periódica de período $4L$.Logo temos que

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\hat{g}(y)dy. \tag{32}$$

A solução dada desta forma é chamada **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial e de fronteira.

5. A solução deste problema é a soma da solução do problema com apenas $f(x)$ não nula, que vamos denotar por $u^{(f)}(x,t)$, com a solução do problema com apenas $g(x)$ não nula, $u^{(g)}(x,t)$, ou seja,

$$u(x,t) = u^{(f)}(x,t) + u^{(g)}(x,t).$$

Logo a solução é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(x-at) + \hat{f}(x+at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\hat{g}(y)dy$$

em que $\hat{f}$ é a extensão de f que é par, simétrica em relação ao ponto $(x,y) = (L,0)$ e periódica de período $4L$ e $\hat{g}$ é a extensão de g que é par, simétrica em relação ao ponto $(x,y) = (L,0)$ e periódica de período $4L$. A solução dada desta forma é chamada **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial e de fronteira.