Corda Elástica Infinita

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

5 de outubro de 2010

Vamos fazer a mudança de variáveis

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at$$

na solução $u(x,t)$ da equação da corda elástica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Ou seja, se $u(x,t) = v(\xi(x,t), \eta(x,t))$, então

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = a\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right).$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\frac{\partial \eta}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\right).$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right).$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\right).$$

Assim

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -4a^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Logo a equação da corda elástica é equivalente a equação

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

ou equivalentemente

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = 0.$$

Mas se $v(\xi, \eta)$ satisfaz esta equação então $\dfrac{\partial v}{\partial \eta}$ não depende de ξ, ou seja,

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \tilde{\phi}(\eta).$$

E assim

$$v(\xi, \eta) = \int \tilde{\phi}(\eta) d\eta + \psi(\xi) = \phi(\eta) + \psi(\xi).$$

Voltando às variáveis x e t, temos que

$$u(x,t) = \phi(x - at) + \psi(x + at), \tag{1}$$

que representa duas ondas viajando em sentidos opostos com velocidade igual a a. Esta é a **solução de d'Alembert** da equação da corda elástica.

Vamos determinar o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto de uma corda elástica infinita, sabendo-se que o deslocamento inicial de cada ponto da corda é dado por $f(x)$, e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é dada por $g(x)$, ou seja, vamos resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Substituindo-se $t = 0$ na solução de D'Alembert (1) e na sua derivada obtemos

$$\begin{aligned} \phi(x) + \psi(x) &= f(x) && (2) \\ -a\phi'(x) + a\psi'(x) &= g(x). && (3) \end{aligned}$$

Derivando-se a equação (2), multiplicando-se por a, somando-se e subtraindo-se da equação (3) obtemos

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \frac{1}{2} f'(x) + \frac{1}{2a} g(x), && (4) \\ \phi'(x) &= \frac{1}{2} f'(x) - \frac{1}{2a} g(x). && (5) \end{aligned}$$

Integrando-se de 0 a x as equações (4) e (5) obtemos

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi(0) + \frac{1}{2}(f(x) - f(0)) + \frac{1}{2a}\int_0^x g(y)dy, \\ \phi(x) &= \phi(0) + \frac{1}{2}(f(x) - f(0)) - \frac{1}{2a}\int_0^x g(y)dy. \end{aligned}$$

Usando-se o fato de que $f(0) = \phi(0) + \psi(0)$ obtemos

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \phi(x - at) + \psi(x + at) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x - at) + f(x + at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(y)dy. \end{aligned}$$

Esta solução é chamada **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial.

Deixamos como exercício para o leitor verificar que se f é contínua por partes com as suas derivadas, f' e f'', também contínua por partes, então para (x,t) tal que f'' é contínua em $x - at$ e $x + at$ temos que $u(x,t)$ dado pela solução de d'Alembert satisfaz a equação da onda, $u(x,0) = f(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercícios

1. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

   Sugestão: faça a mudança de variáveis $\xi = x + t, \quad \eta = x - t$.

2. Determine o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto de uma corda elástica "semi-infinita", presa na extremidade esquerda sabendo-se que o deslocamento inicial de cada ponto da corda é dado por $f(x)$, e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é dada por $g(x)$, ou seja, resolva o PVIF

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ x > 0 \\ u(0,t) = 0. \end{cases}$$

Respostas dos Exercícios

1. Vamos fazer a mudança de variáveis

$$\xi = x + t, \quad \eta = x - t$$

na solução $u(x,t)$ da equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Ou seja, se $u(x,t) = v(\xi(x,t), \eta(x,t))$, então

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right).$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\right).$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right).$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\right).$$

Assim

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) = -4\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - 4\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0.$$

Logo a equação diferencial é equivalente a equação

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0$$

ou equivalentemente

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + v\right) = 0$$

Mas se $v(\xi, \eta)$ satisfaz esta equação então

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} + v = \tilde{\phi}(\eta).$$

Esta é uma equação linear de 1ª ordem que tem solução

$$v(\xi, \eta) = e^{-\eta}\int e^{\eta}\tilde{\phi}(\eta)d\eta + \psi(\xi)e^{-\eta} = \phi(\eta) + \psi(\xi)e^{-\eta}.$$

Voltando às variáveis x e t, temos que

$$u(x,t) = \phi(x - t) + \psi(x + t)e^{-(x-t)}. \tag{6}$$

Substituindo-se $t = 0$ na solução (6) e na sua derivada obtemos

$$\phi(x) + \psi(x)e^{-x} = f(x) \tag{7}$$

$$-\phi'(x) + (\psi'(x) + \psi(x))e^{-x} = g(x). \tag{8}$$

Derivando-se a equação (7) e somando-se da equação (8) obtemos

$$\psi'(x)e^{-x} = \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2}g(x),$$

$$\psi'(x) = \frac{1}{2}f'(x)e^{x} + \frac{1}{2}g(x)e^{x}, \tag{9}$$

Integrando-se de 0 a x a equação (9) obtemos

$$\psi(x) \quad = \quad \psi(0) + \frac{1}{2}\left(f(x)e^x - f(0) - \int_0^x f(y)e^y dy + \int_0^x e^y g(y)dy\right),$$

Substituindo-se na equação (7) obtemos

$$\begin{aligned} \phi(x) &= f(x) - \psi(x)e^{-x} \\ &= -e^{-x}\psi(0) + \frac{e^{-x}}{2}\left(f(x)e^x + f(0) + \int_0^x f(y)e^y dy - \int_0^x e^y g(y)dy\right). \end{aligned}$$

Logo a solução do problema de valor inicial é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \phi(x-t) + \psi(x+t)e^{-(x-t)} \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x-t) + f(x+t)e^{2t}\right) + \frac{e^{-(x-t)}}{2}\int_{x-t}^{x+t} e^y (g(y) - f(y))dy. \end{aligned}$$

2. A solução deste problema é a soma da solução do problema em que $g(x) = 0$ com a solução do problema em que $f(x) = 0$. O primeiro problema tem solução

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(x-at) + \tilde{f}(x+at)\right),$$

em que $\tilde{f}$ é uma extensão de f. Substituindo-se $x = 0$, obtemos que

$$\tilde{f}(-at) + \tilde{f}(at) = 0, \quad \text{para todo } t > 0.$$

Logo $\tilde{f}$ deve ser uma função ímpar. O segundo problema tem como solução

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{g}(y)dy$$

em que $\tilde{g}$ é uma extensão de g. Substituindo-se $x = 0$, obtemos que

$$\int_{-at}^{at} \tilde{g}(y)dy = 0, \quad \text{para todo } t > 0.$$

Logo $\tilde{g}$ deve ser uma função ímpar. A solução do problema inicial é

$$u(x,t) \quad = \quad \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(x-at) + \tilde{f}(x+at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{g}(y)dy,$$

em que

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \geq 0 \\ g(-x) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Ou seja, $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são extensões ímpares de f e g, respectivamente.