UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS A - 17 de maio de 2006
Prof. Reginaldo J. Santos

Exercícios sobre
Mudanças de Variáveis em Equações de 2ª Ordem

1. Resolva as equações abaixo fazendo a substituição $v = y'$.

   (a) $t^2y'' + 2ty' = 1$, $t > 0$

   (b) $y'' + (y')^2 = 0$

   (c) $ty'' = y'$

   (d) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 2x^{-3}$

2. Resolva as equações abaixo fazendo a substituição $v = y'$.

   (a) $yy'' + (y')^2 = 0$

   (b) $y'' + y(y')^3 = 0$

   (c) $y^2y'' - y' = 0$

   (d) $y'' = (y')^3 + y'$

3. Resolva as equações abaixo fazendo a substituição $t = \ln x$.

   (a) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$

   (b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

   (c) $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$

Solução

1. (a) $t^2y'' + 2ty' = 1$
   Fazendo $y' = v$
   $$t^2v' + 2tv = 1$$
   Dividindo-se por t^2
   $$v' + \frac{2}{t}v = \frac{1}{t^2}.$$
   Multiplicando-se a equação por $\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t}dt} = t^2$:
   $$\frac{d}{dt}\left(t^2v\right) = 1$$
   Integrando-se obtemos
   $$t^2v(t) = t + c_1$$
   Logo
   $$\frac{dy}{dt} = v(t) = \frac{1}{t} + \frac{c_1}{t^2}$$
   Integrando-se
   $$y(t) = \ln t + \frac{c_1}{t} + c_2.$$

   (b) $y'' + (y')^2 = 0$
   Fazendo $y' = v$
   $$v' + v^2 = 0$$
   $$\frac{1}{v^2}v' = -1$$
   $$\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{v}\right)\frac{dv}{dt} = 1$$
   $$\frac{1}{v} = t + c_1$$
   Logo
   $$\frac{dy}{dt} = v(t) = \frac{1}{t + c_1}$$
   Integrando-se
   $$y(t) = \ln|t + c_1| + c_2$$

(c) $ty'' = y'$
Fazendo $y' = v$

$$tv' = v$$
$$\frac{1}{v}v' = \frac{1}{t}$$
$$\frac{d}{dv}\left(\ln|v|\right)\frac{dv}{dt} = \frac{1}{t}$$
$$\ln|v| = \ln|t| + \tilde{c}_1$$
$$\frac{v}{t} = c_1$$

Logo
$$\frac{dy}{dt} = v(t) = c_1 t$$

Integrando-se
$$y(t) = c_1\frac{t^2}{2} + c_2$$

(d) Fazendo $y' = v$

$$(1+x^2)v' + 2xv = 2x^{-3}$$

Dividindo-se por $1 + x^2$

$$v' + \frac{2x}{1+x^2}v = \frac{2}{x^3(1+x^2)}.$$

Multiplicando-se a equação por $\mu(x) = e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} = 1 + x^2$:

$$\frac{d}{dx}\left((1+x^2)v\right) = \frac{2}{x^3}$$

Integrando-se obtemos

$$(1+x^2)v(x) = -\frac{1}{x^2} + c_1$$

Logo
$$\frac{dy}{dx} = v(x) = -\frac{1}{(1+x^2)x^2} + \frac{c_1}{1+x^2}$$
$$-\frac{1}{(1+x^2)x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$$

$$-1 = Ax(1+x^2) + B(1+x^2) + (Cx+D)x^2$$

Substituindo-se $x = 0$ obtemos $B = -1$. Comparando-se os termos de grau 2 obtemos $0 = B + D$ ou $D = 1$. Comparando-se os termos de grau 1 obtemos $0 = A$. Comparando-se ou termos de grau 3 obtemos $0 = A + C$ ou $C = 0$. Assim,

$$\int -\frac{1}{(1+x^2)x^2} dx = -\int \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x} + \arctan x + C_2$$

E a solução da equação é

$$y(x) = \frac{1}{x} + c_1 \arctan x + c_2.$$

2. (a) $yy'' + (y')^2 = 0$

$$v = y' \quad y'' = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dy}$$

$$yv\frac{dv}{dy} + v^2 = 0$$

$$v = 0 \quad \text{ou} \quad y\frac{dv}{dy} + v = 0$$

$$v = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = c_1$$

ou

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dy} = -\frac{1}{y}$$

$$\frac{d}{dt}(\ln|v|) = -\frac{1}{y}$$

$$\ln|v| = -\ln|y| + \tilde{c}_1$$

$$\ln|vy| = \tilde{c}_1$$

$$vy = c_1$$

Logo

$$\frac{dy}{dt} = v = \frac{c_1}{y}$$

$$y\frac{dy}{dt} = c_1$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{y^2}{2}\right)\frac{dy}{dt} = c_1$$

A solução é dada implicitamente por

$$\frac{y^2}{2} = c_1 t + c_2$$

(b) $y'' + y(y')^3 = 0$

$$v = y' \quad y'' = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dy}$$

$$v\frac{dv}{dy} + yv^3 = 0$$

$$v = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dy} + yv^2 = 0$$

$$v = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = c_1$$

ou

$$\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dy} = -y$$

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{v}\right) = -y$$

$$\frac{1}{v} = \frac{y^2}{2} + \tilde{c}_1$$

$$v = \frac{2}{y^2 + c_1}$$

Logo

$$\frac{dy}{dt} = v = \frac{2}{y^2 + c_1}$$

$$(y^2 + c_1)\frac{dy}{dt} = 2$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{y^3}{3} + c_1 y\right)\frac{dy}{dt} = 2$$

A solução é dada implicitamente por

$$\frac{y^3}{3} + c_1 y = 2t + c_2$$

(c) $y^2y'' - y' = 0$

$$v = y' \quad y'' = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dy}$$

$$y^2 v\frac{dv}{dy} - v = 0$$

$$v = 0 \quad \text{ou} \quad y^2\frac{dv}{dy} - 1 = 0$$

$$v = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = c_1$$

ou

$$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{y^2}$$

$$v = -\frac{1}{y} + c_1$$

Logo

$$\frac{dy}{dt} = v = -\frac{1}{y} + c_1$$

$$\frac{1}{-\frac{1}{y} + c_1}\frac{dy}{dt} = 1$$

$$\frac{y}{c_1 y - 1}\frac{dy}{dt} = 1$$

$$\frac{1}{c_1}\frac{c_1 y - 1 + 1}{c_1 y - 1}\frac{dy}{dt} = 1$$

$$\frac{1}{c_1}\left(1 + \frac{1}{c_1 y - 1}\right)\frac{dy}{dt} = 1$$

$$\frac{d}{dy}\left(y + \frac{1}{c_1}\ln|c_1 y - 1|\right)\frac{dy}{dt} = c_1$$

A solução é dada implicitamente por

$$y + \frac{1}{c_1}\ln|c_1 y - 1| = c_1 t + c_2$$

(d) $y'' = (y')^3 + y'$

$$v = y' \quad y'' = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dy}$$

$$v\frac{dv}{dy} = v^3 + v$$

$$v = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dy} = v^2 + 1$$

$$v = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = c_1$$

ou

$$\frac{dv}{dy} = v^2 + 1$$

$$\frac{1}{v^2+1}\frac{dv}{dy} = 1$$

$$\frac{d}{dv}\arctan v \frac{dv}{dy} = 1$$

$$\frac{d}{dy}\arctan v = 1$$

$$\arctan v = y + c_1$$

$$v = \tan(y + c_1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \tan(y + c_1)$$

$$\operatorname{cotan}(y + c_1)\frac{dy}{dt} = 1$$

$$\int \operatorname{cotan}(y + c_1) dy = \int \frac{\cos(y + c_1)}{\operatorname{sen}(y + c_1)} dy = \ln|\operatorname{sen}(y + c_1)| + C$$

$$\frac{d}{dy}\ln|\operatorname{sen}(y + c_1)|\frac{dy}{dt} = 1$$

$$\frac{d}{dt}\ln|\operatorname{sen}(y + c_1)| = 1$$

Integrando-se

$$\ln|\operatorname{sen}(y + c_1)| = t + C_2$$

$$\operatorname{sen}(y + c_1) = c_2 e^t$$

3. A substituição $t = \ln x$ transforma a equação de Euler

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

numa equação linear com coeficientes constantes.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) &= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) \\
&= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} \\
&= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}
\end{aligned}
$$

Substituindo-se na equação de Euler obtemos a equação linear com coeficientes constantes

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (b-1)\frac{dy}{dt} + cy = 0.$$

(a) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$ Fazendo $t = \ln x$ a equação se transforma em

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0.$$

Equação característica

$$r^2 + 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = -2, -1$$

Solução geral:

$$y(x) = c_1e^{-2\ln x} + c_2e^{-\ln x} = c_1x^{-2} + c_2x^{-1}$$

(b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ Fazendo $t = \ln x$ a equação se transforma em

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0.$$

Equação característica

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = 2$$

Solução geral:

$$y(x) = c_1e^{2\ln x} + c_2e^{2\ln x}\ln x = c_1x^2 + c_2x^2\ln x$$

(c) $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$ Fazendo $t = \ln x$ a equação se transforma em

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = 0.$$

Equação característica

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \Leftrightarrow r = -1 \pm 2i$$

Solução geral:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= c_1e^{-\ln x}\cos(2\ln x) + c_2e^{-\ln x}\,\mathrm{sen}(2\ln x) \\
&= c_1x^{-1}\cos(2\ln x) + c_2x^{-1}\,\mathrm{sen}(2\ln x)
\end{aligned}
$$