UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS A - 19 de abril de 2006
Prof. Reginaldo J. Santos

Exercícios sobre Equações Lineares de 2ª Ordem não Homogêneas

Resolva as equações abaixo:

1. $y'' + y = \operatorname{cosec} t$
2. $y'' - y = (1 + e^{-t})^{-2}$
3. $y'' + 4\,y = 2\operatorname{sen}(2t) + t$
4. $y'' + 2y = e^{t} + 2$

Solução

1. Equação característica: $r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \pm i$.
   Solução geral da equação homogênea: $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$.
   Vamos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = u_1(t) \cos t + u_2(t) \operatorname{sen} t \tag{1}$$

com a condição de que

$$y_p'(t) = -u_1(t) \operatorname{sen} t + u_2(t) \cos t$$

ou equivalentemente

$$(\cos t) u_1'(t) + (\operatorname{sen} t) u_2'(t) = 0 \tag{2}$$

Substituindo-se $y_p(t), y_p'(t)$ na equação obtemos

$$-(\operatorname{sen} t) u_1'(t) + (\cos t) u_2'(t) = \operatorname{cosec} t \tag{3}$$

Resolvendo o sistema linear $AX = B$ formado por (2) e (3) obtemos

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} &= X = A^{-1} B \\
&= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} B \\
&= \begin{bmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \operatorname{cosec} t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 \\ \operatorname{cotg} t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Assim

$$u_1(t) = -\int 1 \, dt = -t + c_2, \quad u_2(t) = \int \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} dt = \ln|\operatorname{sen} t| + c_1.$$

Tomando $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$ e substituindo-se em (1) obtemos a solução particular

$$y_p(t) = (\ln|\operatorname{sen} t|) \operatorname{sen} t - t \cos t.$$

Portanto a solução geral da equação é

$$y(t) = (\ln|\operatorname{sen} t|) \operatorname{sen} t - t \cos t + c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t.$$

2. Equação característica: $r^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 1$.
Solução geral da equação homogênea: $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$.
Vamos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = u_1(t)e^t + u_2(t)e^{-t} \tag{4}$$

com a condição de que

$$y_p'(t) = u_1(t)e^t - u_2(t)e^{-t}$$

ou equivalentemente

$$e^t u_1'(t) + e^{-t} u_2'(t) = 0 \tag{5}$$

Substituindo-se $y_p(t), y_p'(t)$ na equação obtemos

$$e^t u_1'(t) - e^{-t} u_2'(t) = (1 + e^{-t})^{-2} \tag{6}$$

Resolvendo o sistema linear $AX = B$ formado por (5) e (6) obtemos

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} &= X = A^{-1}B \\
&= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} B \\
&= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ (1 + e^{-t})^{-2} \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} \\ \frac{e^t}{(1+e^{-t})^2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Assim

$$u_1(t) = \int \frac{e^{-t}}{2(1 + e^{-t})^2} dt = \frac{1}{2(1 + e^{-t})} + c_1,$$

$$u_2(t) = -\int \frac{e^t}{2(1 + e^{-t})^2} dt = -\int \frac{e^{3t}}{2(e^t + 1)^2} dt$$

Fazendo $u = e^t + 1$, então

$$u_2(t) = -\frac{1}{2} \int \frac{(1-u)^2}{2u^2} du = -\frac{1}{2} \int (\frac{1}{u^2} - \frac{2}{u} + 1) du = \frac{1}{2(1 + e^t)} + \ln(1+e^t) - \frac{1 + e^t}{2} + c_2$$

Tomando $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$ e substituindo-se em (4) obtemos a solução particular

$$y_p(t) = \frac{e^t}{2(1 + e^{-t})} + \frac{e^{-t}}{2(1 + e^t)} + e^{-t} \ln(1 + e^t) - \frac{1 + e^{-t}}{2}.$$

Portanto a solução geral da equação é

$$y(t) = \frac{e^t}{2(1+e^{-t})} + \frac{e^{-t}}{2(1+e^t)} + e^{-t}\ln(1+e^t) - \frac{1+e^{-t}}{2} + c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

3. Eq. característica: $r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 2i$.

   Sol. geral da eq. homog.: $y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \operatorname{sen}(2t)$

   Sol. particular da forma $y_p(t) = t[A\cos(2t) + B\operatorname{sen}(2t)] + C + Dt$.

   $y_p'(t) = A\cos(2t) + B\operatorname{sen}(2t) + t[-2A\operatorname{sen}(2t) + 2B\cos(2t)] + D$

   $y_p''(t) = (-4At + 4B)\cos(2t) + (-4Bt - 4A)\operatorname{sen}(2t)$

   Substituindo-se na equação

   $(-4At+4B)\cos(2t)+(-4Bt-4A)\operatorname{sen}(2t)+4t[A\cos(2t)+B\operatorname{sen}(2t)]+4C+4Dt = 2\operatorname{sen}(2t)+t$

   $[-4At+4B+4At]\cos(2t)+[-4Bt-4A+4Bt]\operatorname{sen}(2t)+4C+4Dt = 2\operatorname{sen}(2t)+t$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4B &=& 0 \\ -4A &=& 2 \\ 4C+4Dt &=& t \end{array}\right.$$

   Obtemos $A = -1/2, B = 0, C = 0, D = 1/4$. Assim a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \operatorname{sen}(2t) - \frac{t}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}t$$

4. Eq. característica: $r^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{2}i$.

   Sol. geral da eq. homog.: $y(t) = c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{2}t)$

   Sol. particular da forma $y_p(t) = Ae^t + B$.

   $y_p'(t) = Ae^t$

   $y_p''(t) = Ae^t$

   Substituindo-se na equação

   $Ae^t + 2(Ae^t + B) = e^t + 2$

   $3Ae^t + 2B = e^t + 2$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3A &=& 1 \\ 2B &=& 2 \end{array}\right.$$

   Obtemos $A = 1/3, B = 1$. Assim a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + \frac{1}{3}e^t + 1$$