UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS A - 15/03/2005
Prof. Reginaldo J. Santos

Exercícios Complementares de Introdução às Equações Diferenciais

1. Classifique as equações abaixo quanto ao tipo, a ordem e a linearidade.
   (a) $yy' + t = 0$
   (b) $x^2y'' + bxy' + cy = 0$

2. Determine qual ou quais das funções $z_1(x) = x^2$, $z_2(x) = x^3$ e $z_3(x) = e^{-x}$ são soluções da equação
$$(x+3)y'' + (x+2)y' - y = 0$$

3. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Mostre que
   (a) $y(t) = e^{rt}$, com r raiz de $ar + b = 0$, é solução da equação
$$ay' + by = 0.$$
   (b) $y(t) = e^{rt}$, com r raiz de $ar^2 + br + c = 0$, é solução da equação
$$ay'' + by' + cy = 0.$$
   (c) $y(x) = x^r$, com r raiz de $r^2 + (b-1)r + c = 0$, é solução da equação
$$x^2y'' + bxy' + cy = 0.$$

Solução

1. (a) Equação diferencial ordinária de 1a. ordem não linear.

   (b) Equação diferencial ordinária de 2a. ordem linear.

2. $(x+3)z_1'' + (x+2)z_1' - z_1 = (x+3)2 + (x+2)2x - x^2 = 3x^2 + 6x + 6 \neq 0$
   $(x+3)z_2'' + (x+2)z_2' - z_2 = (x+3)6x + (x+2)3x^2 - x^3 = 2x^3 + 12x^2 + 18x \neq 0$
   $(x+3)z_3'' + (x+2)z_3' - z_3 = (x+3)e^{-x} - (x+2)e^{-x} - e^{-x} = 0$
   Logo, $z_1(x) = x^2$ e $z_2(x) = x^3$ não são soluções da equação e $z_3(x) = e^{-x}$ é solução da equação.

   (a) Substituindo-se $y = e^{rt}$ e $\dfrac{dy}{dt} = re^{rt}$ e na equação obtemos

   $$are^{rt} + be^{rt} = (ar+b)e^{rt} = 0,$$

   pois por hipótese $ar + b = 0$.

   (b) Substituindo-se $y = e^{rt}$, $\dfrac{dy}{dt} = re^{rt}$ e $\dfrac{d^2y}{dt^2} = r^2e^{rt}$ na equação obtemos

   $$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0,$$

   pois por hipótese $ar^2 + br + c = 0$.

   (c) Substituindo-se $y = x^r$, $\dfrac{dy}{dx} = rx^{r-1}$ e $\dfrac{d^2y}{dx^2} = r(r-1)x^{r-2}$ em (**??**) obtemos

   $$x^2r(r-1)x^{r-2} + bxrx^{r-1} + cx^r = 0.$$

   $$\left(r^2 + (b-1)r + c\right)x^r = 0,$$

   pois por hipótese $r^2 + (b-1)r + c = 0$.