UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS A - 19 de outubro de 2011
Prof. Reginaldo J. Santos

Exercícios Complementares sobre Transformada de Laplace

1. Mostre que se $f(t)$ é seccionalmente contínua e existem $k > 0$ e $M > 0$ tais que
$$|f(t)| \leq Me^{kt}, \quad \text{para todo } t > 0,$$
então existe a transformada de Laplace de $f(t)$, $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$, definida para $s > k$ e além disso
$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0.$$

2. Mostre que $f(t) = e^{t^2}$ não tem transformada de Laplace.

3. (Função Gama) A função gama é definida pela integral imprópria
$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt, \quad \text{para } p > 0.$$
   (a) Mostre que $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, para $p > 0$.
   (b) Mostre que $\Gamma(n+1) = n!$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$
   (c) Seja $p > -1$. Mostre que $\mathcal{L}(t^p)(s) = \dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$, para $s > 0$.
   (d) Usando o fato de que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, mostre que
   $\mathcal{L}(t^{-1/2})(s) = \sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$ e $\mathcal{L}(t^{1/2})(s) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$.

4. (Derivada da transformada de Laplace) É possível mostrar que se $f(t)$ é admissível, isto é, $f(t)$ é seccionalmente contínua e existem $k > 0$ e $M > 0$ tais que
$$|f(t)| \leq Me^{kt}, \quad \text{para todo } t > 0,$$
então
$$F'(s) = \frac{d}{ds}\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty \frac{d}{ds}e^{-st}f(t)dt.$$

(a) Mostre que $F'(s) = \mathcal{L}(-tf(t))(s)$.

(b) Mostre que $F^{(n)}(s) = \mathcal{L}((-t)^n f(t))(s)$.

(c) Use o item anterior para calcular $\mathcal{L}(t^2 \operatorname{sen} at)(s)$.

Solução

1. $\left|\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt\right| \le \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|dt \le M\int_0^\infty e^{-(s-k)t}dt = \dfrac{M}{s-k}$, para $s > k$.
   Logo $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$ está definida para $s > k$ e além disso $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$.

2. Para $s > 0$ temos que a reta tangente à parábola $y(t) = t^2 - st$ em $t = s$ é $y(t) = st - s^2$ e assim

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}e^{t^2}dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{t^2-st}dt$$
$$\ge \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{st-s^2}dt \ge e^{-s^2}\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{st}dt = \infty.$$

   Logo $f(t) = e^{t^2}$ não tem transformada de Laplace.

3. (a) Usando integração por partes temos que

$$\begin{aligned}\Gamma(p+1) &= \int_0^\infty e^{-x}\,x^p dx = -x^p e^{-x}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-x}\,x^{p-1}dx \\ &= p\Gamma(p).\end{aligned}$$

   pois $\lim_{x\to\infty} x^p e^{-x} = 0$.

   (b) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\cdots\Gamma(1) = n(n-1)\cdots 1 = n!$

   (c) Fazendo a mudança de variáveis $x = st$ obtemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t^p)(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\,t^p dt = \\ &= \frac{1}{s^{p+1}}\int_0^\infty e^{-x}\,x^{p-1}dx = \frac{\Gamma(p)}{s^{p+1}}.\end{aligned}$$

   (d) $\mathcal{L}(t^{-1/2})(s) = \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}}$.
   $\mathcal{L}(t^{1/2})(s) = \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma(1/2)}{s^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$.

4. (a) $F'(s) = \frac{d}{ds}\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty \frac{d}{ds}e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty(-t)e^{-st}f(t)dt = \mathcal{L}(-tf(t))(s)$.

   (b) $F^{(n)} = \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty \frac{d^n}{ds^n}e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty(-t)^n e^{-st}f(t)dt = \mathcal{L}((-t)^n f(t))(s)$.

   (c) $\mathcal{L}(-t\,\mathrm{sen}\,at)(s) = F'(s) = -\frac{2\,a\,s}{(s^2+a^2)^2}$.
   $\mathcal{L}(t^2\,\mathrm{sen}\,at)(s) = F''(s) = \frac{2\,a\left(3\,s^2-a^2\right)}{(s^2+a^2)^3}$. para $s > 0$.