Existência de Soluções de Equações Diferenciais em Série de Potências

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

10 de julho de 2010

1 Resultado Preliminar de Variáveis Complexas

Lema 1. *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ polinômios tais que $g(0) \neq 0$. Então $f(x)/g(x)$ tem uma representação em série de potências de x,*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

que converge para $|x| < r$, sendo r o raio do maior círculo no plano complexo com centro na origem tal que $g(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < r$.

Demonstração. Sejam $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ as raízes de $g(x)$. Então $g(x)$ se fatora como

$$g(x) = a_0(x - a_1)^{n_1} \cdots (x - a_k)^{n_k}.$$

Podemos supor que o grau de $f(x)$ é menor do que o grau de $g(x)$ (por que?). Então decompondo $f(x)/g(x)$ em frações parciais obtemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ij}}{(x - a_i)^j}$$

Para $a \in \mathbb{C}$, usando a série geométrica, temos que

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a-z} = -\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{z}{a}} = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{a^{n+1}}\right) z^n$$

que converge para $\left|\frac{z}{a}\right| < 1$, ou seja, para $|z| < |a|$. Além disso, usando a derivada da série anterior obtemos que

$$\frac{1}{(z-a)^2} = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-a}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{a^{n+1}}\right) z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-n-1}{a^{n+2}}\right) z^n$$

que também converge para $|z| < |a|$. Como

$$\frac{1}{(z-a)^j} = (-1)^{j-1}(j-1)!\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

então $\dfrac{1}{(z-a)^j}$ tem uma representação em série de potências de z para $j = 1, 2, \ldots$ que converge para $|z| < |a|$.

Logo $f(z)/g(z)$ tem uma representação em série de potências de z que converge para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < r$, em que $r = \min\{|a_1|, \ldots, |a_k|\}$. Donde segue o resultado. $\square$

2 Teorema Principal

Teorema 2. *Considere a equação*

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0,$$

em que $P(x), Q(x)$ e $R(x)$ são polinômios sem fatores comuns. Se $P(0) \neq 0$, então a equação tem solução geral em série de potências

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n\right) + a_1\left(x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n\right),$$

em que $y_1(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n$ e $y_2(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n$ são soluções fundamentais da equação que convergem para $|x| < r$, sendo r o raio do maior círculo no plano complexo com centro na origem tal que $P(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < r$.

Demonstração. Dividindo-se a equação por $P(x)$ obtemos uma equação da forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Pelo Lema 1 os coeficientes podem ser escritos em série de potências de x

$$p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \frac{R(x)}{P(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n,$$

que convergem para $|x| < r$, sendo r o raio do maior círculo no plano complexo com centro na origem tal que $P(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < r$. Suponhamos que a solução da equação possa ser escrita em série de potências de x como

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Vamos mostrar que os coeficientes satisfazem uma relação de recorrência de tal forma que a série converge para $|x| < r$. As derivadas, $y'(x)$ e $y''(x)$, são representadas em série de potências como

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n, \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n.$$

Substituindo-se na equação obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2}+\sum_{k=0}^{n}\left[p_{n-k}(k+1)a_{k+1}+q_{n-k}a_k\right]\right]x^n=0.$$

Esta é a série nula, o que implica que todos os coeficientes são iguais a zero. Assim

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}=-\sum_{k=0}^{n}\left[p_{n-k}(k+1)a_{k+1}+q_{n-k}a_k\right]. \tag{1}$$

Por outro lado, da convergência das séries de $p(x)$ e $q(x)$ segue-se que existe $M>0$ tal que $|p_n|t^n<M$ e $|q_n|t^n<M$, para $0<t<r$ e $n=0,1,2\ldots$ Usando isso

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)|a_{n+2}| &\le \frac{M}{t^n}\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)|a_{k+1}|+|a_k|\right]t^k\\ &\le \frac{M}{t^n}\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)|a_{k+1}|+|a_k|\right]t^k+M|a_{n+1}|t. \end{aligned}\tag{2}$$

Vamos considerar a série $\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n$, com os coeficientes definidos por

$$A_0=|a_0|,\quad A_1=|a_1|$$

$$(n+2)(n+1)A_{n+2}=\frac{M}{t^n}\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)A_{k+1}+A_k\right]t^k+MA_{n+1}t. \tag{3}$$

Usando (2) e (3), por indução, temos que $|a_n|\le A_n$, para $n=0,1,2,\ldots$ Vamos mostrar que a série $\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n$ é convergente para $|x|<r$, o que implica que a série de $y(x)$ também é convergente. Usando (3) temos que

$$(n+1)nA_{n+1}=\frac{M}{t^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+1)A_{k+1}+A_k\right]t^k+MA_nt$$

$$n(n-1)A_n=\frac{M}{t^{n-2}}\sum_{k=0}^{n-2}\left[(k+1)A_{k+1}+A_k\right]t^k+MA_{n-1}t.$$

Assim

$$\begin{aligned}(n+1)nA_{n+1} &= \frac{1}{t}\left\{\frac{M}{t^{n-2}}\sum_{k=0}^{n-2}\left[(k+1)A_{k+1}+A_k\right]t^k+M\left[nA_n+A_{n-1}\right]t\right\}+MA_nt\\ &= \frac{1}{t}\left\{n(n-1)A_n-MA_{n-1}t+M\left[nA_n+A_{n-1}\right]t\right\}+MA_nt\\ &= \frac{A_n}{t}\left\{n(n-1)+Mnt+Mt^2\right\}\end{aligned}$$

Então
$$\left|\frac{A_{n+1}x^{n+1}}{A_nx^n}\right| = \frac{n(n-1)+Mnt+Mt^2}{t(n+1)n}|x| \to \frac{|x|}{t}, \text{ quando } n\to\infty.$$
Assim a série $\sum_{n=0}^{\infty} A_nx^n$ converge $|x|<t$, para todo $t<r$. Logo a série $\sum_{n=0}^{\infty} A_nx^n$ converge para $|x|<r$. Como $|a_n|\leq A_n$, para $n=0,1,2,\ldots$, então também converge para $|x|<r$ a série
$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Agora, fazendo $n=0$ em (1), obtemos a_2 como combinação linear de a_0 e a_1. Substituindo-se este resultado em (1) para $n=1$ obtemos também a_3 como combinação linear de a_0 e a_1. Continuando desta forma obtemos

$$a_n = b_na_0 + c_na_1, \quad \text{para } n=2,3,\ldots.$$

Assim,
$$y(x) = a_0\left(1+\sum_{n=2}^{\infty} b_nx^n\right) + a_1\left(x+\sum_{n=2}^{\infty} c_nx^n\right).$$

Deixamos como exercício para o leitor a verificação de que $y_1(x) = 1+\sum_{n=2}^{\infty} b_nx^n$ e $y_2(x) = x+\sum_{n=2}^{\infty} c_nx^n$ são soluções fundamentais da equação. □

Exercício.
Mostre que se
$$y(x) = a_0\left(1+\sum_{n=2}^{\infty} b_nx^n\right) + a_1\left(x+\sum_{n=2}^{\infty} c_nx^n\right).$$
é solução em série de potências da equação

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$$

então
$$y_1(x) = 1+\sum_{n=2}^{\infty} b_nx^n \quad \text{e} \quad y_2(x) = x+\sum_{n=2}^{\infty} c_nx^n$$
são soluções fundamentais da equação.

Resposta.
$y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação pois fazendo $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$ obtemos $y_1(t)$ e fazendo $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$ obtemos $y_2(t)$. Além disso

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](0) &= \det \begin{bmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Como o wronskiano de $y_1(t)$ e $y_2(t)$ é diferente de zero para $t = 0$ e $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação, então $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fundamentais da equação.

Referências

[1] F. Brauer and J. A. Nohel. *Ordinary Differential Equations: A First Course*. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1967.

[2] Ruel V. Churchil. *Variáveis Complexas e suas Aplicações*. McGraw-Hill, Rio de Janeiro, 1975.

[3] E. A. Coddington. *Introduction to Ordinary Differential Equations*. Prentice-Hall, New York, 1961.