Existência e Unicidade de Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

10 de julho de 2010

Sumário

1 Introdução

Apresentamos aqui demonstrações auto-suficientes dos teoremas de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais, sistemas de equações diferencias lineares e equações diferenciais lineares de 2ª ordem que não requerem o uso de continuidade uniforme.

2 Equações de 1ª Ordem

Teorema 1 (Existência e Unicidade)**.** *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Se $f(t,y)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *são contínuas no retângulo*

$$R = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < t < \beta,\ \delta < y < \gamma\}$$

contendo (t_0, y_0)*, então o problema (1) tem uma única solução em um intervalo contendo* t_0*.*

Demonstração.

1. **Existência:**
   Defina a seqüência de funções $y_n(t)$ por

   $$y_0(t) = y_0, \quad y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

   Como $f(t,y)$ é contínua no retângulo R, existe uma constante positiva b tal que

   $$|f(t,y)| \leq b, \quad \text{para } (t,y) \in R.$$

   Assim

   $$|y_1(t) - y_0| \leq b|t - t_0|, \quad \text{para } \alpha < t < \beta.$$

   Como $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua no retângulo R, existe uma constante positiva a (por que?) tal que

   $$|f(t,y) - f(t,z)| \leq a\,|y - z|, \quad \text{para } \alpha < t < \beta \text{ e } \delta < y, z < \gamma.$$

Assim

$$|y_2(t) - y_1(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_0(s))| ds$$
$$\leq a \int_{t_0}^{t} |y_1(s) - y_0| ds \leq ab \int_{t_0}^{t} |s - t_0| ds = ab \frac{|t - t_0|^2}{2}$$

e

$$|y_3(t) - y_2(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s))| ds$$
$$\leq a \int_{t_0}^{t} |y_2(s) - y_1(s)| ds$$
$$\leq a^2 b \int_{t_0}^{t} \frac{|s - t_0|^2}{2} ds = a^2 b \frac{|t - t_0|^3}{6}.$$

Vamos supor, por indução, que

$$|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \leq a^{n-2} b \frac{|t - t_0|^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Então

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))| ds$$
$$\leq a \int_{t_0}^{t} |y_{n-1}(s)) - y_{n-2}(s)| ds$$
$$\leq a \int_{t_0}^{t} a^{n-2} b \frac{|s - t_0|^{n-1}}{(n-1)!} ds = a^{n-1} b \frac{|t - t_0|^n}{n!} \quad (2)$$

Estas desigualdades são válidas para $\alpha \leq \alpha' < t < \beta' \leq \beta$ em que α' e β' são tais que $\delta < y_n(t) < \gamma$ sempre que $\alpha' < t < \beta'$ (por que existem α' e β' ?).

Segue-se de (2) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}(\beta - \alpha)^n}{n!}$$

que é convergente. Como

$$y_n(t) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} (y_k(t) - y_{k-1}(t)),$$

então $y_n(t)$ é convergente. Seja

$$y(t) = \lim_{n\to\infty} y_n(t).$$

Como

$$|y_m(t) - y_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |y_k(t) - y_{k-1}(t)| \leq b \sum_{k=n+1}^{m} \frac{a^{k-1}(\beta-\alpha)^k}{k!},$$

então passando ao limite quando m tende a infinito obtemos que

$$|y(t) - y_n(t)| \leq b \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^{k-1}(\beta-\alpha)^k}{k!} \tag{3}$$

Logo dado um $\epsilon > 0$, para n suficientemente grande, $|y(t) - y_n(t)| < \epsilon/3$, para $\alpha' < t < \beta'$. Daí segue-se que $y(t)$ é contínua, pois dado um $\epsilon > 0$, para s suficientemente próximo de t, temos que $|y_n(t) - y_n(s)| < \epsilon/3$ e para n suficientemente grande $|y(t) - y_n(t)| < \epsilon/3$ e $|y(s) - y_n(s)| < \epsilon/3$, o que implica que

$$|y(t) - y(s)| \leq |y(t) - y_n(t)| + |y_n(t) - y_n(s)| + |y_n(s) - y(s)| < \epsilon.$$

Além disso para $\alpha' < t < \beta'$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))ds = \int_{t_0}^{t} f(s, \lim_{n\to\infty} y_n(s))ds = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds,$$

pois, por (3), temos que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \right| & \\
&\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))|ds \\
&\leq a \int_{t_0}^{t} |y_n(s) - y(s)|ds \\
&\leq ab(t - t_0) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^{k-1}(\beta-\alpha)^k}{k!}
\end{aligned}$$

que tende a zero quando n tende a infinito. Portanto

$$\begin{aligned}
y(t) &= \lim_{n\to\infty} y_n(t) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds = \\
&= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \lim_{n\to\infty} y_{n-1}(s))ds = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds
\end{aligned}$$

Derivando em relação a t esta equação vemos que $y(t)$ é solução do problema de valor inicial.

2. **Unicidade:**
Vamos supor que $y(t)$ e $z(t)$ sejam soluções do problema de valor inicial. Seja

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} |y(s) - z(s)| ds.$$

Assim, como

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} y'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds, \quad z(t) = \int_{t_0}^{t} z'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))ds,$$

então

$$\begin{aligned} u'(t) &= |y(t) - z(t)| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} |y'(s) - z'(s)| ds = \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| ds \\ &\leq a \int_{t_0}^{t} |y(s) - z(s)| ds \end{aligned}$$

ou seja,

$$u'(t) \leq a u(t).$$

Subtraindo-se $au(t)$ e multiplicando-se por e^{-at} obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{-at}u(t)) \leq 0, \quad \text{com } u(t_0) = 0.$$

Isto implica que $e^{-at}u(t) = 0$ (lembre-se que $u(t) \geq 0$) e portanto que $u(t) = 0$, para todo t. Assim $y(t) = z(t)$, para todo t.

$\square$

2.1 Exercícios

1. Mostre que se $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua no retângulo

$$R = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < t < \beta,\ \gamma < y < \delta\},$$

então existe uma constante positiva a tal que

$$|f(t,y) - f(t,z)| \leq a\,|y - z|, \quad \text{para } \alpha < t < \beta \text{ e } \delta < y, z < \gamma.$$

Sugestão: Para t fixo, use o Teorema do Valor Médio para f como função somente de y. Escolha a como sendo o máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ no retângulo.

2. Mostre que se $f(t,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas no retângulo

$$R = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < t < \beta,\ \gamma < y < \delta\}$$

e a e b são constantes positivas tais que

$$|f(t,y)| \leq b, \quad |f(t,y) - f(t,z)| \leq a\,|y - z|, \quad \text{para } \alpha < t < \beta \text{ e } \delta < y, z < \gamma,$$

então existem α' e β' com $\alpha \leq \alpha' < t_0 < \beta' \leq \beta$ tais que a seqüência

$$y_0(t) = y_0, \quad y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

satisfaz $\delta < y_n(t) < \gamma$ sempre que $\alpha' < t < \beta'$. Sugestão: mostre que

$$|y_n(t) - y_0| \leq \left(\frac{b}{a} - 1\right) e^{a|t - t_0|}.$$

3 Sistemas Lineares de 1ª Ordem

Considere o sistema de equações diferenciais lineares

$$\begin{cases} x_1'(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_2(t) \end{cases}$$

que pode ser escrito na forma de uma equação diferencial matricial

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

ou

$$X'(t) = A(t)X(t) + F(t), \tag{4}$$

em que

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

Teorema 2 (Existência e Unicidade)**.** *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} X'(t) &= A(t)X(t) + F(t) \\ X(t_0) &= X^{(0)} \end{cases} \tag{5}$$

Suponha que $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$ sejam funções contínuas num intervalo $I = [a, b]$ contendo t_0. Então o problema (5) tem uma única solução no intervalo I.

Demonstração.

1. Existência:
   Defina a seqüência $X^{(k)}(t)$ por

$$X^{(0)}(t) = X^{(0)}, \quad X^{(k)}(t) = X^{(0)} + \int_{t_0}^{t} (A(s)X^{(k-1)}(s) + F(s))ds, \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots$$

Assim, cada componente $X^{(k)}(t)$ é dada por

$$x_i^{(k)} = x_i^{(0)} + \int_{t_0}^{t} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(s) x_j^{(k-1)}(s) + f_i(s)) ds.$$

Sejam $M, N > 0$ tais que

$$|a_{ij}(t)| \leq M, \quad \text{para } i,j = 1, \ldots n \text{ e } t \in I \tag{6}$$

$$|x_i^{(1)}(t) - x_i^{(0)}| \leq N, \quad \text{para } i = 1, \ldots n \text{ e } t \in I$$

Então

$$|x_i^{(2)}(t) - x_i^{(1)}(t)| \leq \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(s)| |x_j^1(s) - x_j^0| ds$$
$$\leq M \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} |x_j^{(1)}(s) - x_j^{(0)}| ds \leq nMN(t - t_0)$$

$$|x_i^{(3)}(t) - x_i^{(2)}(t)| \leq \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(s)| |x_j^{(2)}(s) - x_j^{(1)}(s)| ds$$
$$\leq M \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} |x_j^{(2)}(s) - x_j^{(1)}(s)| ds \leq nM^2N \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} |s - t_0| ds$$
$$\leq n^2 M^2 N \frac{|t - t_0|^2}{2}$$

Por indução

$$|x_i^{(k+1)}(t) - x_i^{(k)}(t)| \leq \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(s)| |x_j^{(k)}(s) - x_j^{(k-1)}(s)| ds$$
$$\leq M \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} |x_j^{(k)}(s) - x_j^{(k-1)}(s)| ds \leq M \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} n^{k-1} M^{k-1} N \frac{|s - t_0|^{k-1}}{(k-1)!} ds$$
$$\leq n^k M^k N \frac{|t - t_0|^k}{k!}$$

Usando o mesmo argumento usado na demonstração do Teorema 1 na página 3 temos que $x_i^{(k)}(t)$ é uma seqüência convergente. Seja

$$x_i(t) = \lim_{k \to \infty} x_i^{(k)}(t).$$

Também pelo mesmo argumento usado na demonstração do Teorema 1 na página 3 temos que $x_i(t)$ é contínua e vale

$$\lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{t}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(s)x_j^{(k-1)}(s)+f_i(s))ds=\int_{t_0}^{t}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(s)x_j(s)+f_i(s))ds.$$

Assim

$$x_i(t)=\lim_{k\to\infty}x_i^{(k)}(t)=x_i^{(0)}+\lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{t}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(s)x_j^{(k-1)}(s)+f_i(s))ds=$$
$$=x_i^{(0)}+\int_{t_0}^{t}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(s)\lim_{k\to\infty}x_j^{(k-1)}(s)+f_i(s))ds=$$
$$=x_i^{(0)}+\int_{t_0}^{t}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(s)x_j(s)+f_i(s))ds$$

Derivando em relação a t esta equação vemos que $x_i(t)$ é solução do problema de valor inicial.

2. Unicidade:
Sejam $X(t)$ e $Y(t)$ duas soluções do problema de valor inicial (5). Então

$$Z(t)=X(t)-Y(t)$$

é solução do problema de valor inicial (5) com $X^{(0)}=0$ e $F(t)=0$. Assim temos que mostrar que $Z(t)=0$, para todo t.

Seja $u(t)=\int_{t_0}^{t}(|z_1(s)|+\cdots+|z_n(s)|)ds$. Como

$$z_1(t)=\int_{t_0}^{t}z_1'(s)ds,\ \ldots,\ z_n(t)=\int_{t_0}^{t}z_n'(s)ds,$$

então por (6) temos

$$|z_1(t)|+\cdots+|z_n(t)|\le\int_0^t(|z_1'(s)|+\cdots+|z_n'(s)|)ds$$
$$\le\int_0^t\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}(s)||z_j(s)|ds$$
$$\le nM\int_0^t(|z_1(s)|+\cdots+|z_n(s)|)ds=nMu(t),$$

para $t \in I$, ou seja,

$$u'(t) \leq nMu(t).$$

Multiplicando a inequação acima por e^{-nMt} obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{-nMt}u(t)) \leq 0, \quad \text{com } u(t_0) = 0.$$

Isto implica que $u(t) = 0$, para todo t (verifique!) e portanto $Z(t) = 0$, para $t \in I$.

□

3.1 Existência e Unicidade de Soluções de Equações Lineares de 2ª Ordem

Como conseqüência do resultado que acabamos de provar temos o resultado abaixo para existência e unicidade de soluções de equações lineares de 2ª ordem.

Corolário 3 (Existência e Unicidade)**.** *O problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + p(t)\dfrac{dy}{dt} + q(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

para $p(t), q(t)$ e $f(t)$ funções contínuas em um intervalo aberto I contendo t_0 tem uma única solução neste intervalo.

Demonstração. Sejam $x_1(t) = y(t)$ e $x_2(t) = y'(t)$. O problema de valor inicial é equivalente ao problema

$$\begin{cases} X'(t) &= A(t)X(t) + F(t) \\ X(t_0) &= X^{(0)} \end{cases}$$

em que

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X^{(0)} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{bmatrix}.$$

A conclusão segue-se da aplicação do Teorema 2. □

3.2 Respostas dos Exercícios

1. Seja t fixo, tal que $\alpha < t < \beta$. Pelo Teorema do Valor Médio, dados y e z com $\delta < y, z < \gamma$ existe ξ entre y e z tal que

$$f(t,y) - f(t,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(t,\xi)\,(y-z).$$

Seja $a = \max\limits_{\delta < w < \gamma} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,w)\right|$. Tomando-se o módulo da equação acima obtemos

$$|f(t,y) - f(t,z)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,\xi)\right|\,|y-z| \leq a\,|y-z|.$$

2. Seja α' o máximo entre α, o valor de $t < t_0$ tal que $\frac{b}{a}\left(e^{a|t-t_0|}-1\right) = \gamma$ e o valor de $t < t_0$ tal que $-\frac{b}{a}\left(e^{a|t-t_0|}-1\right) = \delta$. Seja β' o mínimo entre β, o valor de $t > t_0$ tal que $\frac{b}{a}\left(e^{a|t-t_0|}-1\right) = \gamma$ e o valor de $t > t_0$ tal que $-\frac{b}{a}\left(e^{a|t-t_0|}-1\right) = \delta$. Vamos mostrar, por indução, que

$$|y_n(t) - y_0| \leq \frac{b}{a}\left(e^{a|t-t_0|}-1\right), \quad \text{para } \alpha' < t < \beta'$$

e assim que $\delta < y_n(t) < \gamma$, para $\alpha' < t < \beta'$.

$$|y_1(t) - y_0| \leq b|t-t_0| \leq b\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1}|t-t_0|^n}{n!} = \frac{b}{a}\left(e^{a|t-t_0|}-1\right)$$

Vamos supor, por indução, que

$$|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \leq a^{n-2}b\frac{|t-t_0|^{n-1}}{(n-1)!}$$

e

$$|y_k(t) - y_0| \leq \frac{b}{a}\left(e^{a|t-t_0|}-1\right), \quad \text{para } k = 1,\ldots,n-1 \text{ e } \alpha' < t < \beta'$$

e assim que $\delta < y_k(t) < \gamma$, para $k = 1,\ldots,n-1$ e $\alpha' < t < \beta'$. Então por (2) na página 4,

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq a^{n-1}b\frac{|t-t_0|^n}{n!}$$

e assim

$$|y_n(t) - y_0| \leq \sum_{k=1}^{n}|y_k(t) - y_{k-1}(t)| \leq b\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1}|t-t_0|^n}{n!} = \frac{b}{a}\left(e^{a|t-t_0|}-1\right),$$

Referências

[1] William E. Boyce and Richard C. DiPrima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 7a. edition, 2002.

[2] Djairo G. de Figueiredo and Aloisio F. Neves. *Equações Diferenciais Aplicadas*. SBM, Rio de Janeiro, 2a. edition, 2005.

[3] Jorge Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA, Rio de Janeiro, 1979.