

Hamiltoniano de uma Partícula Carregada em um Campo Eletromagnético

Reginaldo J. Santos

Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais

<https://regijs.github.io/>

9 de setembro de 2026

1 Força de Lorentz

A Força de Lorentz é o resultado da soma da força elétrica proveniente de um campo elétrico $\vec{E}$ com a força magnética devida a um campo magnético $\vec{B}$ atuando sobre uma partícula carregada eletricamente que se move no espaço:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

O campo elétrico $\vec{E}$ e o campo magnético $\vec{B}$ podem ser escritos em termos do potencial eletrostático ϕ e do vetor potencial magnético $\vec{A}$ como

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Assim, a equação para força de Lorentz se torna:

$$\vec{F} = q \left[-\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) \right]$$

Usando a identidade $\nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) = \vec{v} \times \nabla \times \vec{A} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A}$, obtemos

$$\vec{F} = q \left[-\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A} \right].$$

Como $\frac{d\vec{A}}{dt} = (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$, então

$$\vec{F} = q \left[-\nabla(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{d\vec{A}}{dt} \right].$$

Mas, $\vec{A} = \nabla_{\vec{v}}(\vec{v} \cdot \vec{A})$, $\nabla_{\vec{v}} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}}$ e $\nabla = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$. Então

$$\vec{F} = q \left[-\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}}(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \right) \right].$$

Pela segunda Lei de Newton

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right)$$

Logo, a Lagrangiana em coordenadas cartesianas é dada por:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - q(\phi - \vec{A} \cdot \vec{v}),$$

pois satisfaz a equação

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$$

2 Cálculo do Momento Canônico

O momento conjugado (ou canônico) $\vec{p}$ é definido pela derivada parcial da Lagrangiana em relação à velocidade $\vec{v}$:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 - q(\phi - \vec{A} \cdot \vec{v}) \right) = m \vec{v} + q \vec{A}.$$

Como $\vec{p} = m \vec{v} + q \vec{A}$, então

$$\vec{v} = \frac{1}{m} (\vec{p} - q \vec{A}).$$

3 A Transformada de Legendre

O Hamiltoniano é obtido aplicando a transformada de Legendre sobre a Lagrangiana:

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L$$

Substituindo a expressão da Lagrangiana (L) na equação acima:

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 - q\phi + q \vec{A} \cdot \vec{v} \right).$$

Agrupando os termos que contêm a velocidade $\vec{v}$:

$$H = (\vec{p} - q \vec{A}) \cdot \vec{v} - \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + q\phi.$$

4 Substituição da Velocidade

O Hamiltoniano deve ser expresso exclusivamente em termos da posição e do momento canônico $\vec{p}$ (nunca em termos de $\vec{v}$).

Substituindo $\vec{v} = \frac{1}{m} (\vec{p} - q \vec{A})$, obtido acima, no Hamiltoniano:

$$H = (\vec{p} - q \vec{A}) \cdot \left[\frac{1}{m} (\vec{p} - q \vec{A}) \right] - \frac{1}{2} m \left[\frac{1}{m} (\vec{p} - q \vec{A}) \right]^2 + q\phi$$

Simplificando:

$$H = \frac{1}{m} (\vec{p} - q \vec{A})^2 - \frac{1}{2m} (\vec{p} - q \vec{A})^2 + q\phi$$

Subtraindo as frações chegamos ao resultado final:

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q \vec{A})^2 + q\phi.$$

Referências Bibliográficas

- [1] Reginaldo J. Santos. *Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2016.