Dependência Linear

Dizemos que duas funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são **linearmente dependentes (L.D.)** em um intervalo I, se uma das funções é um múltiplo escalar da outra, ou seja, se

$$y_1(t) = \alpha y_2(t) \quad \text{ou} \quad y_2(t) = \alpha y_1(t), \quad \text{para todo } t \in I.$$

Caso contrário, dizemos que elas são **linearmente independentes (L.I.)**.
Se duas funções são L.D. em um intervalo I, então

$$W[y_1, y_2](t) = \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = 0, \quad \text{para todo } t \in I$$

pois uma coluna da matriz acima é um múltiplo escalar da outra. Assim, vale o seguinte resultado.

Teorema 2.5. *Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são funções tais que*

$$W[y_1, y_2](t_0) = \det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0, \quad \textit{para algum } t_0 \in I,$$

então $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são linearmente independentes (L.I.) em I.

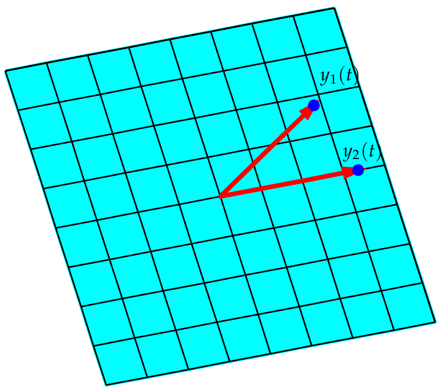

Figura 2.3 – $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluções fundamentais de uma equação diferencial linear homogênea

Usando a linguagem da Álgebra Linear podemos dizer que duas soluções fundamentais formam uma base para o subespaço das soluções de uma equação homogênea (2.1), pois elas são L.I. e geram o subespaço (toda solução é uma combinação linear delas).

Observe que o wronskiano pode ser calculado para quaisquer par de funções mesmo que elas não sejam soluções de uma equação diferencial. Também os conceitos de dependência e independência linear são definidos para duas funções que podem ou não ser soluções de uma equação diferencial.