Crescimento Logístico da População do Brasil

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

6 de abril de 2011

Sumário

Os cálculos feitos usando o Maxima estão disponíveis em
http://www.mat.ufmg.br/~regi/maxima/popbrasil.html.

O arquivo para o WxMaxima está em
http://www.mat.ufmg.br/~regi/maxima/popbrasil.wxmx.

1 Os Dados, a Equação Diferencial e a Solução

Na tabela abaixo estão os dados dos 6 penúltimos recenseamentos realizados no Brasil.

Ano	População
1950	52 milhões
1960	70 milhões
1970	93 milhões
1980	119 milhões
1991	147 milhões
2000	170 milhões

Vamos supor que a população do Brasil siga o modelo de crescimento logístico, ou seja, que seja solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky(y_M - y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

em que k e a população máxima y_M são constantes a ser determinadas.

Este problema tem como solução

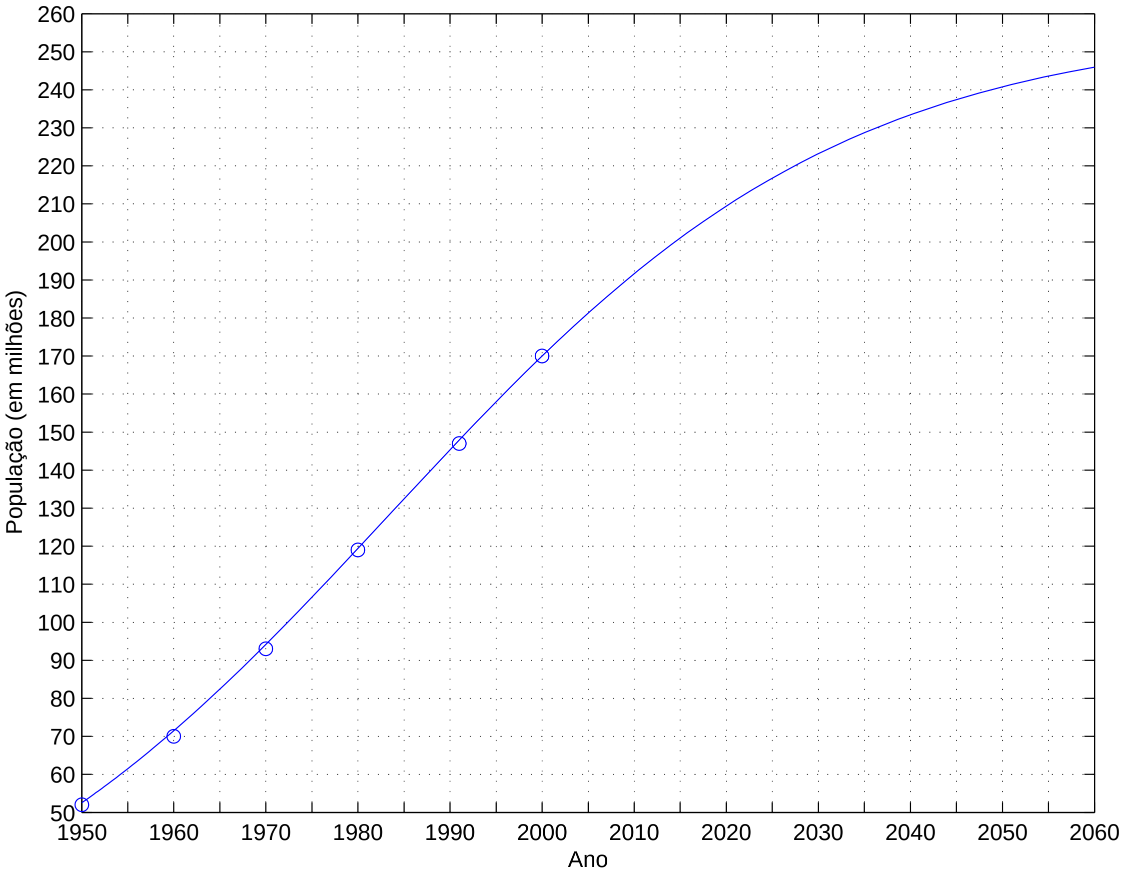
$$y(t) = \frac{y_M}{1 + \left(\frac{y_M - y_0}{y_0}\right) e^{-y_M k (t - t_0)}}.$$

Com base nos dados da tabela acima usando regressão linear podemos estimar que o valor máximo da população é de $y_M = 257$ milhões de habitantes para o modelo de crescimento logístico e que $k = 0,04/y_M$. Neste caso a população como função do tempo, $y(t)$, é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{0,04}{257} y(257 - y) \\ y(2000) = 170 \text{ milhões} \end{cases}$$

e é dada por

$$y(t) = \frac{257 \cdot 10^6}{1 + 0,5726 \cdot e^{-0,04(t-2000)}}.$$



2 Determinação dos Parâmetros

Podemos escrever o modelo logístico na forma

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = ay + b, \text{em que } a = -k \text{ e } b = ky_M.$$

Usando a tabela anterior, podemos aproximar a derivada $y'(t_i)$, para cada ano t_i em que foi realizado um recenseamento pela diferença finita para frente

$$\frac{dy}{dt}(t_i) \approx \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

ou pela diferença finita para trás

$$\frac{dy}{dt}(t_i) \approx \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}.$$

Para obter uma aproximação com mais acuidade vamos tomar a média aritmética das duas aproximações.

t_i	y_i	$g_i = \frac{1}{y_i}\frac{y_{i+1}-y_i}{t_{i+1}-t_i}$	$h_i = \frac{1}{y_i}\frac{y_i-y_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}$	$\frac{g_i+h_i}{2}$
1950	52 milhões	$0,0346$	-	
1960	70 milhões	$0,0329$	$0,0257$	$0,0293$
1970	93 milhões	$0,0280$	$0,0247$	$0,0263$
1980	119 milhões	$0,0214$	$0,0218$	$0,0216$
1991	147 milhões	$0,0174$	$0,0173$	$0,0174$
2000	170 milhões	-	$0,0150$	

Assim

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}(t_i) = ay(t_i) + b \approx \frac{g_i + h_i}{2},$$

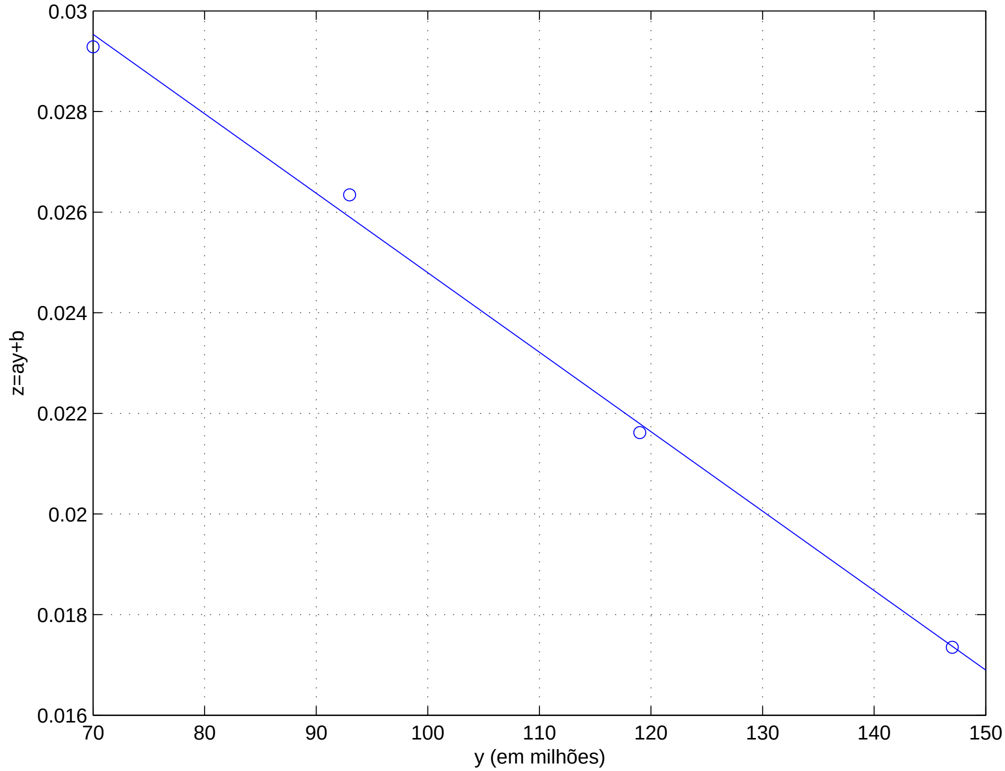
para $t_i = 1960, 1970, 1980, 1991$. Usando quadrados mínimos encontramos os parâmetros a e b da melhor reta que se ajusta ao conjunto de pontos

y_i	$\frac{g_i+h_i}{2}$
70 milhões	$0,0293$
93 milhões	$0,0263$
119 milhões	$0,0216$
147 milhões	$0,0174$

que são $a = -1,58 \cdot 10^{-10}$, $b = 0,04$. Assim obtemos $k = -a = 1,58 \cdot 10^{-10}$ e $y_M = b/k = 257$ milhões.

Usando $t_0 = 2000$, $y_0 = 170$ milhões obtemos

$$y(t) = \frac{257 \cdot 10^6}{1 + 0,51 \cdot e^{-0,04(t-2000)}}$$



3 Comparação com Estimativas do IBGE

No dia 05 de outubro de 2007 o IBGE anunciou a estimativa para a população de 2007 em 184 milhões de habitantes. Usando a função obtida temos que para $t = 2007$

$$y(2007) = 185 \, \text{milhões de habitantes.}$$

Isto representa uma diferença de aproximadamente 0,5 % em relação a estimativa do IBGE.

O IBGE no dia 29 de agosto de 2008 anunciou em $189,6$ milhões de habitantes a estimativa para a população o Brasil para 2008.

Para $t = 2008$ temos

$$y(2008) = 187 \text{ milhões de habitantes.}$$

Uma diferença de $1,5$ %.

4 Comparação com o Recenseamento de 2010

No recenseamento realizado em 2010 a população foi de $190,7$ milhões. Para $t = 2010$ temos

$$y(2010) = 191,6 \text{ milhões de habitantes.}$$

Um erro de $0,5$ %.

Seguindo o modelo logístico a população atingirá

- 90 % de 257 milhões = 231 milhões em 2037;

- 99 % de 257 milhões = 254 milhões em 2096.

Referências

[1] Reginaldo J. Santos. *Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2011.