Problema de Dirichlet na Faixa Semi-infinita

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

5 de outubro de 2010

Vamos resolver o problema de Dirichlet na faixa semi-infinita

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \; y > 0, \; 0 < x < a, \\ u(x,0) = f(x), \; 0 < x < a, \; u(x,y) \text{ é limitada para } y > 0, \; 0 < x < a, \\ u(0,y) = 0, \; u(a,y) = 0, \; y > 0 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de y, ou seja,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y).$$

Dividindo-se por $X(x)Y(y)$ obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de y. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \; X(0) = 0; X(a) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \; Y(y) \text{ é limitada para } y > 0. \end{cases}$$

A primeira equação com as condições de fronteira tem solução não nula somente se $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e neste caso as soluções fundamentais são

$$X_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Assim a segunda equação diferencial com a condição de $Y(y)$ ser limitada, para $y > 0$, tem soluções fundamentais

$$Y_n(y) = e^{-\frac{n\pi y}{a}}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira $u(0,y) = 0$, $u(a,y) = 0$, para $y > 0$, com a condição de $u(x,y)$ ser limitada tem soluções fundamentais

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}e^{-\frac{n\pi y}{a}}$$

Vamos supor que a solução seja a série

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}e^{-\frac{n\pi y}{a}}. \tag{1}$$

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que ter

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}.$$

Assim se a função $f(x)$ é contínua por partes com sua derivada também contínua por partes, então os coeficientes são dados por

$$c_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}dx,\ n = 1,2,3\ldots \tag{2}$$

Deixamos como exercício para o leitor a verificação de que $u(x,y)$ dada por (1) com os coeficientes dados por (2) realmente é a solução do problema de Dirichlet.

Exercícios

1. Resolva o problema de encontrar a temperatura estacionária em cada ponto de uma faixa semi-infinita, que é isolada nas laterais, sendo conhecida a temperatura em uma extremidade da faixa. Ou seja, resolva o problema de valores de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ y > 0, \ 0 < x < a, \\ u(x,0) = f(x), \ 0 < x < a, \ |u(x,y)| \leq M, \ \text{para } y > 0, \ 0 < x < a, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(a,y) = 0, \ y > 0. \end{cases}$$

Se a temperatura em uma extremidade da faixa é constante, $f(x) = T_0$, para $0 < x < a$, qual é a temperatura estacionária em qualquer ponto da faixa, $u(x,y)$?

Respostas dos Exercícios

1. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de y, ou seja,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0.$$

Dividindo-se por $X(x)Y(y)$ obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de y. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \ X'(0) = 0; X'(a) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \ Y(y) \text{ é limitada para } y > 0. \end{cases}$$

A primeira equação com as condições de fronteira tem solução não nula somente se $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}$, para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ e neste caso as soluções fundamentais são

$$X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{a}, \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Assim a segunda equação diferencial com a condição de $Y(y)$ ser limitada para $y > 0$, tem soluções fundamentais

$$Y_n(y) = e^{-\frac{n\pi y}{a}}, \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = 0$, com a condição de $u(x,y)$ ser limitada, para $y > 0$, tem soluções fundamentais

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = \cos\frac{n\pi x}{a} e^{-\frac{n\pi y}{a}}, \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Vamos supor que a solução seja a série

$$u(x,y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{a} e^{-\frac{n\pi y}{a}}.$$

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que ter

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{a}.$$

Assim se a função $f(x)$ é contínua por partes com sua derivada também contínua por partes, então os coeficientes são dados por

$$c_0 = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx, \ c_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx, \ n = 1, 2, 3 \ldots$$