Propriedades de Séries de Potências

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

2 de outubro de 2011

Uma **série de potências** de x é uma expressão da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

em que $a_0, a_1, a_2, \ldots$ são números denominados **coeficientes da série**. Podemos definir uma função $f(x)$ que associa a cada valor de x, para o qual existe o limite

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \lim_{N\to\infty} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_N x^N),$$

o valor deste limite e escrevemos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

O maior valor de r para o qual o limite acima existe para $|x| < r$, ou seja, a **série converge** é chamado **raio de convergência** da série.

Exemplo 1. A série geométrica

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}, \quad \text{para } |x| < 1$$

tem raio de convergência $r = 1$.

A seguir apresentamos as propriedades das séries de potências que são usadas no estudo das soluções de equações diferenciais em série de potências.

Proposição 1. *São válidas as seguintes propriedades para as séries de potências:*

(a) *Se* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *tem raio de convergência* $r_1 > 0$ *e* $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *tem raio de convergência* $r_2 > 0$*, então para todos os números* α *e* β*,*

$$\alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n,$$

tem raio de convergência que é pelo menos $r = \min\{r_1, r_2\}$*.*

(b) *Se* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ *tem raio de convergência* $r > 0$*, então para* $k, l = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}(\alpha x^k + \beta x^l) f(x) &= \alpha x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta x^l \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k} + \beta \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+l} \\ &= \alpha \sum_{n'=k}^{\infty} a_{n'-k} x^{n'} + \beta \sum_{n'=l}^{\infty} a_{n'-l} x^{n'} = \alpha \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} x^n + \beta \sum_{n=l}^{\infty} a_{n-l} x^n.\end{aligned}$$

(c) *Se* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ *tem raio de convergência* $r > 0$*, então* $f(x)$ *tem derivadas de todas as ordens, para* $|x| < r$ *e*

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ f''(x) &= 2a_2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 2x^2 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n \\ f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} (n-k+1) \cdots (n-1) n a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) \cdots (n+k-1) a_{n+k} x^n \end{aligned}$$

(d) *Se* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$*, para todo* x*, com* $|x| < r$ *e* $r > 0$*, então* $a_n = 0$*, para* $n = 0, 1, 2, \ldots$

Demonstração.

(a) Para x tal que $|x| < \min\{r_1, r_2\}$ temos

$$\alpha f(x) + \beta g(x) =$$
$$\alpha \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n + \beta \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} b_n x^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n.$$

(b) Para x tal que $|x| < r$ temos

$$\begin{aligned}(\alpha x^k + \beta x^l) f(x) &= (\alpha x^k + \beta x^l) \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \lim_{N\to\infty} (\alpha x^k + \beta x^l) \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(\alpha \sum_{n=0}^{N} a_n x^{n+k} + \beta \sum_{n=0}^{N} a_n x^{n+l} \right) \\ &= \alpha \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n x^{n+k} + \beta \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n x^{n+l}.\end{aligned}$$

(c) Basta provarmos para a primeira derivada. Como

$$\sqrt[n]{|n a_n x^n|} = \sqrt[n]{n}\ \sqrt[n]{|a_n|}\ |x|$$

e $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ possuem o mesmo raio de convergência. Assim a série $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ converge para $|x| < r$.

Sejam s, t tais que $0 < |x| \leq s < t < r$. Então,
existe $K > 0$ tal que $n|a_n|t^{n-1} \leq K$ e assim

$$|n a_n x^{n-1}| \leq n|a_n| t^{n-1} \frac{s^{n-1}}{t^{n-1}} \leq K \left(\frac{s}{t}\right)^{n-1}.$$

Seja $\epsilon > 0$. Sejam

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n x^n,$$

$$q_N(x,h) = \frac{S_N(x+h) - S_N(x)}{h},$$

$$q(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $M, N > N_0$ implica $\sum_{n=M}^{N} K\left(\frac{s}{t}\right)^{n-1} < \frac{\epsilon}{3}$. Então

$$|S_N'(x) - S_M'(x)| = \left|\sum_{n=M}^{N} n a_n x^{n-1}\right| \leq \sum_{n=M}^{N} \left|n a_n x^{n-1}\right| \leq \sum_{n=M}^{N} K\left(\frac{s}{t}\right)^{n-1} < \frac{\epsilon}{3}, \quad (1)$$

para todo $x \in [-s, s]$. Deixando N fixo e passando ao limite quando M tende a infinito obtemos

$$|S_N'(x) - g(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}. \quad (2)$$

Sejam $M, N > N_0$. Pelo Teorema do Valor Médio aplicado a $S_N(x) - S_M(x)$ e por (1) obtemos que existe ξ entre x e $x+h$ tal que

$$|q_N(x,h) - q_M(x,h)| = |S_N'(\xi) - S_M'(\xi)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Deixando N fixo e passando ao limite quando M tende a infinito obtemos

$$|q_N(x,h) - q(x,h)| \leq \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{para todo } h \text{ tal que } x+h \in [-s,s]. \quad (3)$$

Como $\lim_{h\to 0} q_N(x,h) = S_N'(x)$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < h < \delta$ implica que

$$|q_N(x,h) - S_N'(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad (4)$$

De (3), (4) e (2) segue-se que

$$\begin{aligned} &|q(x,h) - g(x)| \\ &\qquad \leq |q(x,h) - q_N(x,h)| + |q_N(x,h) - S_N'(x)| + |S_N'(x) - g(x)| \\ &\qquad\qquad < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

(d) Usando o item anterior temos que

$$f(0) = a_0 = 0, \quad f'(0) = a_1 = 0, \quad f''(0) = 2a_2 = 0, \quad \ldots \quad f^{(k)}(0) = (k-1)!\, a_k = 0.$$

Logo todos os coeficientes da série são iguais a zero.

□