Retratos de Fase de Sistemas Lineares Homogêneos 2×2

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

2 de novembro de 2011

Exemplo 1. Considere o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1'(t) & = & x_1(t) & - & x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -4x_1(t) & + & x_2(t) \end{array}\right.$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial como

$$X'(t) = AX(t),$$

em que $X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ e $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$.

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

é diagonalizável e as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} V & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

Portanto a solução geral do sistema é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Um gráfico mostrando diversas soluções aparecem na Figura 1. Este tipo de gráfico, em que desenhamos no plano cartesiano várias curvas $(x_1(t), x_2(t))$, soluções do sistema, é chamado **retrato de fase**. As curvas $(x_1(t), x_2(t))$, soluções do sistema, são chamadas **trajetórias**.

Para $c_2 = 0$ as trajetórias estão contidas na reta que passa pela origem e tem direção do vetor $V = (1, -2)$, como pode ser visto mais facilmente fazendo a mudança de variáveis $t' = e^{3t}$ em

$$X(t) = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = c_1\, t' \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Estas trajetórias se afastam da origem, quando t cresce. Para $c_1 = 0$ as trajetórias estão contidas na reta que passa pela origem e tem direção do vetor $W = (1, 2)$, como pode ser visto mais facilmente fazendo a mudança de variáveis $t' = e^{-t}$ em

$$X(t) = c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = c_2\, t' \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Estas trajetórias se aproximam da origem, quando t cresce. Para $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$, temos curvas semelhantes a hipérboles, como pode ser visto mais facilmente fazendo a mudança de variáveis $t' = e^{3t}$ em

$$X(t) = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1\, t' \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 \frac{1}{\sqrt[3]{t'}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Estas trajetórias se aproximam da reta que passa pela origem, e tem direção do vetor $V = (1, -2)$, quando t cresce.

A disposição das trajetórias é típica de um sistema linear $X' = AX$, em que os autovalores de A são reais não nulos com sinais contrários. Neste caso, dizemos que a origem é um **ponto de sela**.

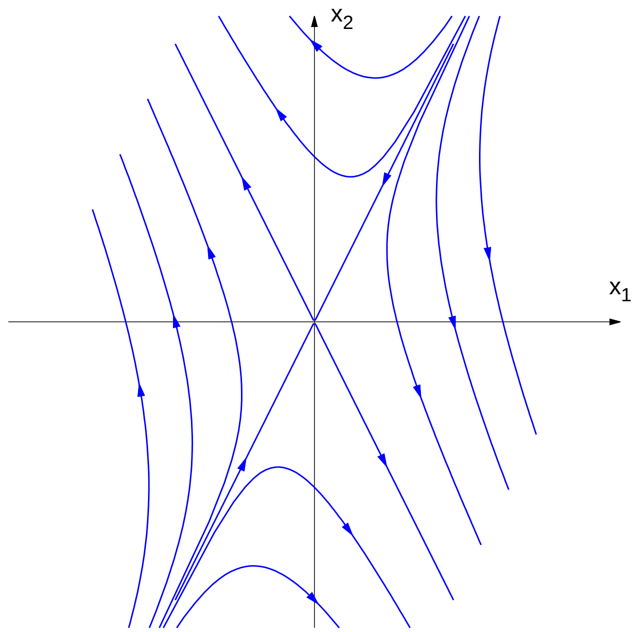

Figura 1: Trajetórias do sistema do Exemplo 1

Exemplo 2. Considere o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1'(t) & = & 3x_1(t) & - & x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -2x_1(t) & + & 2x_2(t) \end{array} \right.$$

A matriz do sistema A é diagonalizável e as matrizes

$$P = [\, V \; W \,] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

Portanto a solução geral do sistema de equações diferenciais é dada por

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2\, e^{4t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O plano de fase com várias trajetórias é mostrado na Figura 2. Para $c_2 = 0$ as trajetórias estão contidas na reta que passa pela origem e tem direção do vetor $V = (1, 2)$, como pode ser visto mais facilmente fazendo a mudança de variáveis $t' = e^t$ em

$$X(t) = c_1\, e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1\, t' \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Para $c_1 = 0$ as trajetórias estão contidas na reta que passa pela origem e tem direção do vetor $W = (-1, 1)$, como pode ser visto mais facilmente fazendo a mudança de variáveis $t' = e^{4t}$ em

$$X(t) = c_2\, e^{4t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = c_2\, t' \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$, temos curvas semelhantes a parábolas, como pode ser visto mais facilmente fazendo a mudança de variáveis $t' = e^t$ em

$$X(t) = c_1\, e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2\, e^{4t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1\, t' \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2\, t'^4 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Todas as trajetórias se afastam da origem quando t cresce.

A disposição das trajetórias é típica de um sistema linear $X' = AX$, em que os autovalores de A são reais e positivos. Neste caso, dizemos que a origem é um **nó instável** ou **fonte**. No caso em que os autovalores de A reais e negativos as trajetórias são semelhantes, mas percorridas no sentido contrário às da Figura 2. Neste caso, dizemos que a origem é um **nó atrator** ou **sumidouro**.

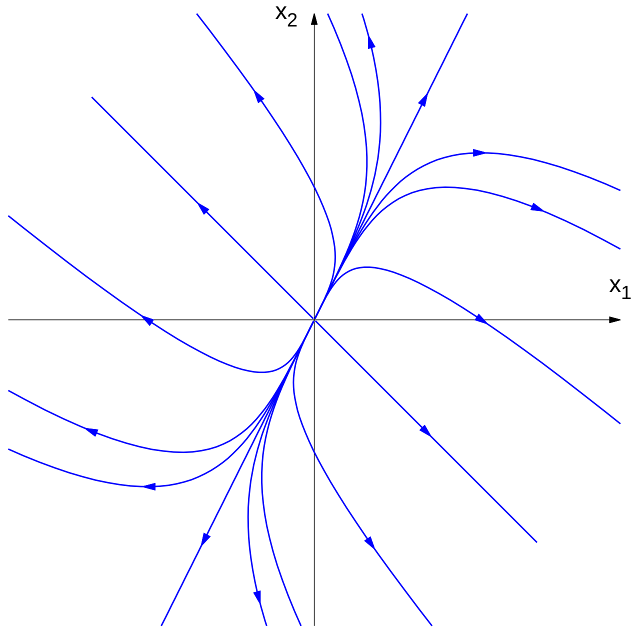

Figura 2: Trajetórias do sistema do Exemplo 2

Exemplo 3. Considere o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1'(t) & = & -x_1(t) & + & 2x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -x_1(t) & + & x_2(t) \end{array} \right.$$

Este sistema pode ser escrito na forma $X'(t) = AX(t)$, em que

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

é diagonalizável em $\mathbb{C}$ e as matrizes

$$P = [\, Z\ \overline{Z}\,] = \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

Portanto a solução do sistema de equações diferenciais é dada por

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= c_1\,\Re\left\{e^{it}\begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}\right\} + c_2\,\Im\left\{e^{it}\begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \\ &= c_1\left(\cos t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + c_2\left(\cos t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \operatorname{sen} t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

Os gráficos de diversas soluções aparecem na Figura 3. As trajetórias são elipses e o sentido é o de $V = (1,1)$ para $-W = (1,0)$ ou de $W = (-1,0)$ para $V = (1,1)$, como pode ser visto mais facilmente se reescrevemos a solução geral como

$$X(t) = \cos t\left(c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \operatorname{sen} t\left(c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - c_1\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

A disposição das trajetórias é típica de um sistema linear $X' = AX$, em que os autovalores de A são complexos com a parte real igual a zero. Neste caso, dizemos que a origem é um **centro**.

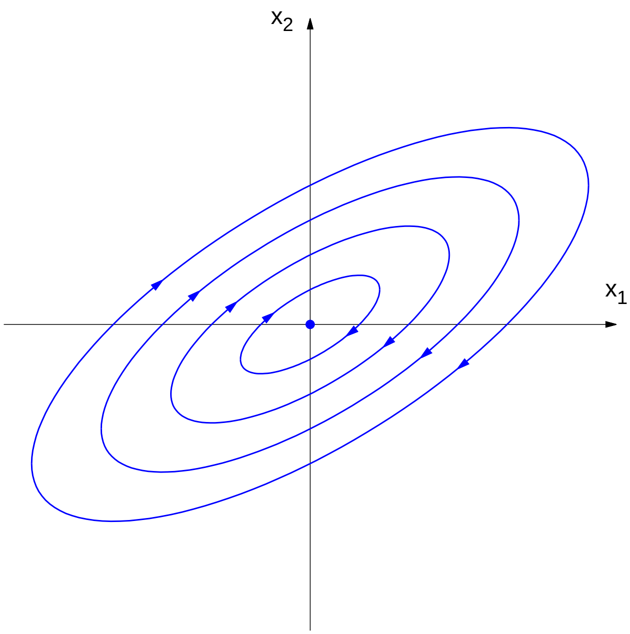

Figura 3: Trajetórias do sistema do Exemplo 3

Exemplo 4. Considere o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1'(t) & = & -3x_1(t) & + & 2x_2(t), \\ x_2'(t) & = & -4x_1(t) & + & x_2(t). \end{array} \right.$$

A matriz do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é diagonalizável em $\mathbb{C}$ e as matrizes

$$P = [\, Z\ \overline{Z}\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2i & 0 \\ 0 & -1-2i \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

Portanto a solução do sistema de equações diferenciais é dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= c_1 \Re \left\{ e^{(-1+2i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix} \right\} + c_2 \Im \left\{ e^{(-1+2i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix} \right\} \\ &= c_1 e^{-t} \left(\cos 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + c_2 e^{-t} \left(\cos 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \operatorname{sen} 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Plano de fase contendo diversas trajetórias aparecem na Figura 4. As trajetórias são espirais com sentido $V = (1,1)$ para $-W = (0,-1)$ ou de $W = (0,1)$ para $V = (1,1)$, como pode ser visto mais facilmente se reescrevemos a solução geral como

$$X(t) = e^{-t} \left[\cos 2t \left(c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + \operatorname{sen} 2t \left(c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right].$$

A disposição das trajetórias é típica de um sistema linear $X' = AX$, em que os autovalores de A são complexos com a parte real negativa. Neste caso, dizemos que a origem é um **foco atrator** ou **sumidouro espiral**. Se os autovalores de A fossem complexos com a parte real positiva as trajetórias seriam espirais crescentes percorridas no mesmo sentido que às da Figura 4. As trajetórias para o caso em que P é a mesma matriz deste exemplo, mas com autovalores $1 \pm 2i$ está mostrado na Figura 5. Neste caso, a origem é um **foco instável** ou **fonte espiral**.

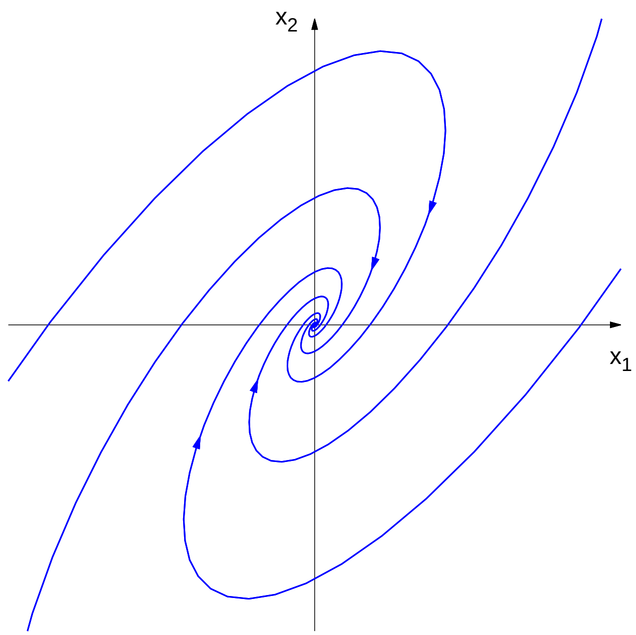

Figura 4: Trajetórias do sistema do Exemplo 4

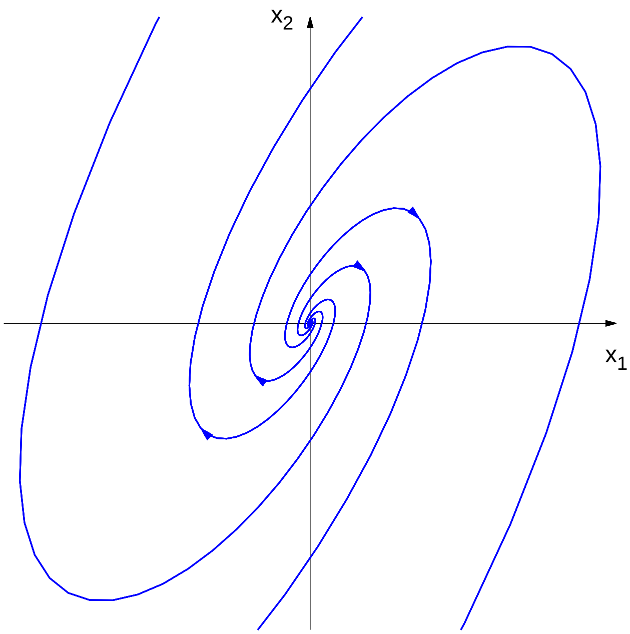

Figura 5: Trajetórias de um sistema cujos autovetores são os mesmos da matriz do Exemplo 4, mas com autovalores iguais a $1 \pm 2i$.

Exemplo 5. Considere o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1'(t) & = & -x_1(t) & + & x_2(t), \\ x_2'(t) & = & -x_1(t) & - & 3x_2(t). \end{array}\right.$$

A matriz do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

As matrizes

$$P = [\, V \; W \,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PJP^{-1}.$$

Portanto a solução geral do sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right).$$

A Figura 6 é o plano de fase contendo diversas trajetórias. Para $c_2 = 0$ as trajetórias estão contidas na reta que passa pela origem e tem direção do vetor $V = (1, -1)$, como pode ser visto mais facilmente fazendo a mudança de variáveis $t' = e^{-2t}$ em

$$X(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = c_1 t' \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

As trajetórias se aproximam da origem quando t cresce. Para $c_2 \neq 0$, vamos reescrever a solução geral como

$$X(t) = e^{-2t} \left(c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right).$$

Observamos inicialmente que o ponto inicial da trajetória é $c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e que a parte que está entre parênteses, $c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, representa uma reta que passa por $c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e tem direção de $V = (1, -1)$.

A reta que passa pela origem e tem direção de $V = (1, -1)$ divide o plano em dois semiplanos. Se o ponto inicial está do mesmo lado de $W = (0, 1)$, então $c_2 > 0$ e o ponto $X(t)$ se move com o seu comprimento sendo reduzido do fator e^{-2t}, sendo puxado no sentido de $V = (1, -1)$, quando t cresce. Se o ponto inicial está do lado oposto ao de $W = (0, 1)$, então $c_2 < 0$ e o ponto $X(t)$ se move com o seu comprimento sendo reduzido do fator e^{-2t}, sendo puxado no sentido de $-V = (-1, 1)$, quando t cresce.

A disposição das trajetórias é típica de um sistema linear $X' = AX$, em que a matriz A não é diagonalizável em $\mathbb{C}$ e o único autovalor é negativo. Neste caso, dizemos que a origem é um **nó impróprio assintoticamente estável**.

Se neste exemplo, o único autovalor de A, λ, fosse positivo as trajetórias seriam desenhadas da seguinte forma. Se o ponto inicial está do mesmo lado de $W = (0, 1)$, então $c_2 > 0$ e o ponto $X(t)$ se move com o seu comprimento sendo aumentado do fator $e^{\lambda t}$, sendo puxado no sentido de $V = (1, -1)$, quando t cresce. Se o ponto inicial está do lado oposto ao de $W = (0, 1)$, então $c_2 < 0$ e o ponto $X(t)$ se move com o seu comprimento sendo aumentado do fator $e^{\lambda t}$, sendo puxado no sentido de $-V = (-1, 1)$, quando t cresce. As trajetórias para o caso em que P é a mesma matriz deste exemplo, mas $\lambda = 2$ está mostrado na Figura 7. Neste caso, dizemos que a origem é um **nó impróprio instável**.

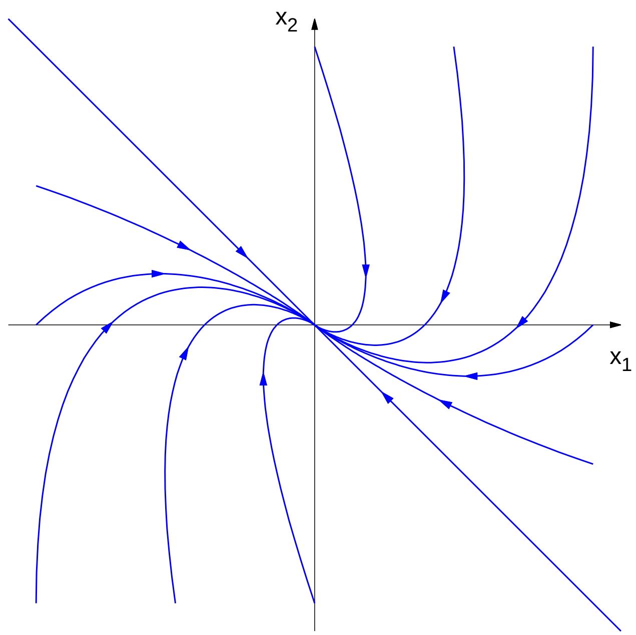

Figura 6: Trajetórias do sistema do Exemplo 5

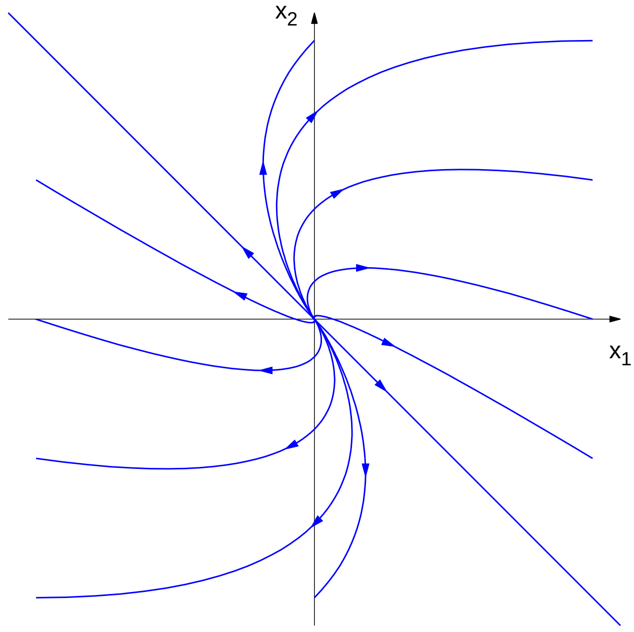

Figura 7: Trajetórias de um sistema que cuja matriz P é a mesma do Exemplo 5, mas com o autovalor $\lambda = 2$.