Séries de Fourier de Senos e de Cossenos de Índices Ímpares

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

26 de setembro de 2010

Análogo ao caso de integração de funções ímpares no intervalo $[-L, L]$, se $h : [0, 2L] \to \mathbb{R}$ é simétrica em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$, ou seja, se é tal que

$$h(2L - t) = -h(t), \quad \text{para todo } t \in [0, L],$$

então (verifique!)

$$\int_0^{2L} h(t)dt = 0.$$

Também análogo ao caso de integração de funções pares no intervalo $[-L, L]$, se $h : [0, 2L] \to \mathbb{R}$ é simétrica em relação à reta $t = L$, ou seja, se é tal que

$$h(2L - t) = h(t), \quad \text{para todo } t \in [0, 2L],$$

então (verifique!)

$$\int_0^{2L} h(t)dt = 2\int_0^{L} h(t)dt.$$

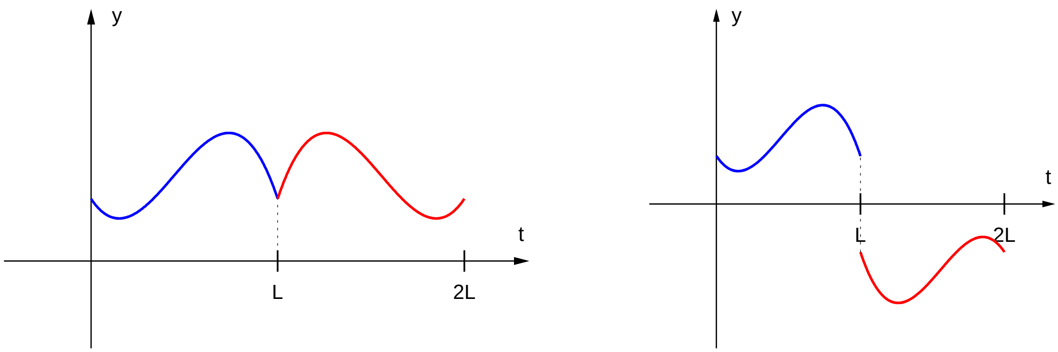

Figura 1: Prolongamentos com simetria em relação à reta $t = L$ e em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$ de uma função definida inicialmente somente no intervalo $[0, L]$

Já vimos que se uma função $f : [0, 2L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes com derivada f' também contínua por partes, então pelo Corolário 5.2 ela pode ser representada por sua série de Fourier de senos

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2L}.$$

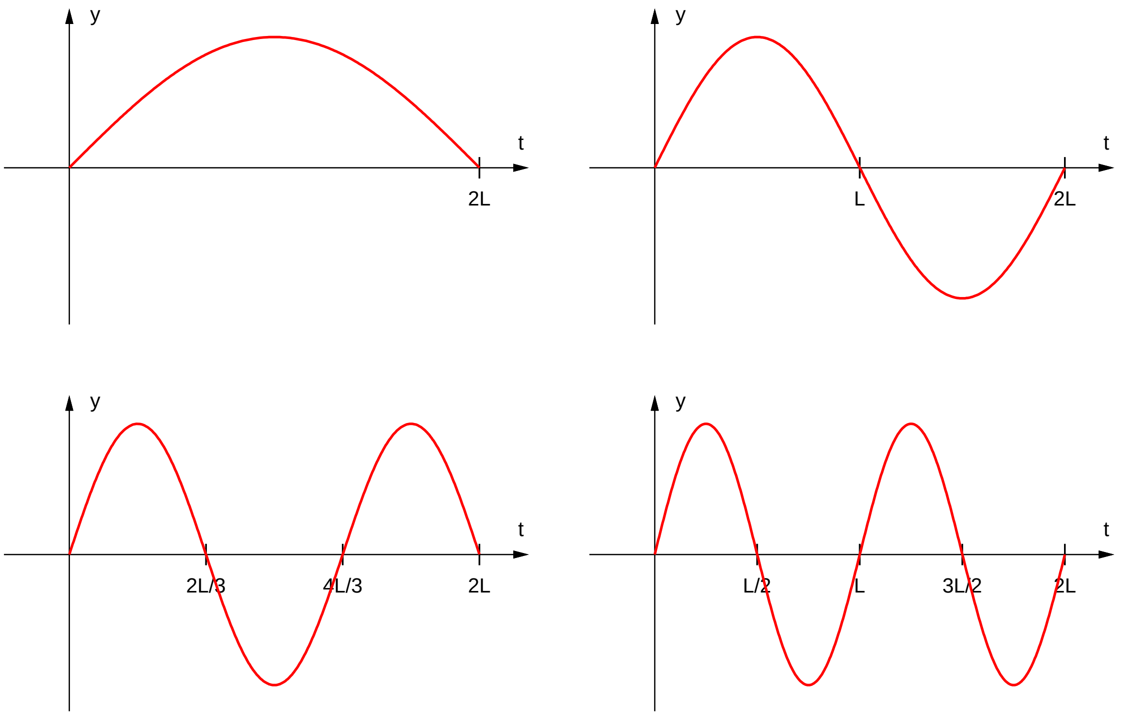

Figura 2: $\operatorname{sen} \dfrac{n\pi t}{2L}$, para $n = 1, 2, 3, 4$

com os coeficientes dados por

$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{2L}dt \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

Se a função f é simétrica em relação à reta $t = L$, isto é, se

$$f(2L - t) = f(t), \quad \text{para todo } t \in [0, L],$$

então $f(t)\operatorname{sen}\dfrac{2k\pi t}{2L}$ é simétrica em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$ e $f(t)\operatorname{sen}\dfrac{(2k+1)\pi t}{2L}$ é simétrica em relação à reta $t = L$ (verifique!). Separando os coeficientes em de índice par e de índice ímpar, obtemos que:

$$\begin{aligned} b_{2k} &= 0 \\ b_{2k+1} &= \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi t}{2L}dt \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

E assim

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in (0, 2L)$$

Ou seja, se uma função $f : [0, 2L] \to \mathbb{R}$ é simétrica em relação à reta $t = L$, a sua série de Fourier de senos tem somente os termos de índice ímpar.

Para as funções f que são definidas apenas em $[0, L]$ podemos prolongá-las ao intervalo $[0, 2L]$ de forma que elas sejam simétricas em relação à reta $t = L$:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } 0 \leq t < L \\ f(2L-t), & \text{se } L \leq t < 2L \end{cases} \qquad \text{é simétrica em relação à reta } t = L$$

Corolário 1. *Seja L um número real maior que zero. Para toda função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes. A **série de Fourier de senos de índice ímpar** de f*

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L},$$

em que

$$b_{2k+1} \quad = \quad \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L} dt \quad \textit{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

converge para f nos pontos do intervalo $(0, L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de senos de Fourier de índice ímpar:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \textit{para } t \in (0, L).$$

A série acima é a série de Fourier da função $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \textit{se } 0 \leq t < L, \\ f(2L-t), & \textit{se } L \leq t < 2L, \end{cases}$$

$$\tilde{f}(t) = -\tilde{f}(-t), \textit{ se } -2L \leq t < 0, \quad \tilde{f}(t+4L) = \tilde{f}(t).$$

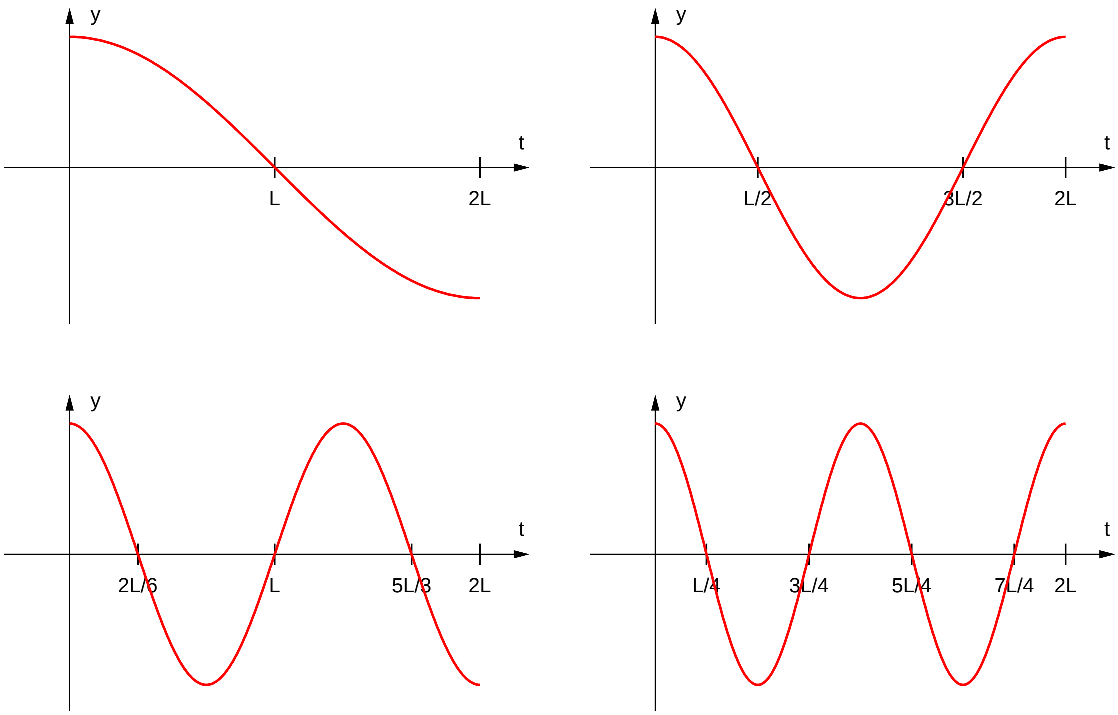

Figura 3: $\cos \frac{n\pi t}{2L}$, para $n = 1, 2, 3, 4$

Já vimos que se uma função $f : [0, 2L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes com derivada f' também contínua por partes, então pelo Corolário 5.2 ela pode ser representada por sua série de Fourier de cossenos

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi t}{2L}.$$

com os coeficientes dados por

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{2L} dt \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Se a função f é simétrica em relação ao ponto $(L, 0)$, isto é,

$$f(2L - t) = -f(t), \quad \text{para todo } t \in [0, L],$$

então $f(t)\cos\dfrac{2k\pi t}{2L}$ é simétrica em relação ao ponto $(t,y)=(L,0)$ e $f(t)\cos\dfrac{(2k+1)\pi t}{2L}$ é simétrica em relação à reta $t=L$ (verifique!). Separando os coeficientes em de índice par e de índice ímpar, obtemos que (verifique!):

$$\begin{aligned} a_{2k} &= 0 \\ a_{2k+1} &= \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\frac{(2k+1)\pi t}{2L}dt \quad \text{para } k=0,1,2,\ldots \end{aligned}$$

E assim

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}\cos\frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t\in(0,2L)$$

Ou seja, se uma função $f:[0,2L]\to\mathbb{R}$ é simétrica em relação ao ponto $(L,0)$, a sua série de Fourier de cossenos tem somente os termos de índice ímpar.

Para as funções f que são definidas apenas em $[0,L]$ podemos prolongá-las ao intervalo $[0,2L]$ de forma que elas sejam simétricas em relação ao ponto $(L,0)$:

$$\tilde{f}(t)=\begin{cases} f(t), & \text{se } 0\le t<L \\ -f(2L-t), & \text{se } L\le t<2L \end{cases} \qquad \text{simétrica em relação ao ponto } (L,0).$$

E assim temos o seguinte resultado.

Corolário 2. *Seja L um número real maior que zero. Para toda função $f:[0,L]\to\mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes. A* ***série de Fourier de cossenos de índice ímpar*** *de f*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}\cos\frac{(2k+1)\pi t}{2L},$$

em que

$$a_{2k+1} = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\frac{(2k+1)\pi t}{2L}dt \quad \textit{para } k=0,1,2,\ldots$$

converge para f nos pontos do intervalo $(0,L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de cossenos de Fourier de índice ímpar:

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}\cos\frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \textit{para } t\in(0,L).$$

A série acima é a série de Fourier da função $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } 0 \le t < L, \\ -f(2L - t), & \text{se } L \le t < 2L, \end{cases}$$

$$\tilde{f}(t) = \tilde{f}(-t), \text{ se } -2L \le t < 0, \quad \tilde{f}(t + 4L) = \tilde{f}(t).$$

Exercícios

1. (a) Mostre que se uma função $h : [0, 2L] \to \mathbb{R}$ é simétrica em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$, ou seja, se

$$h(2L - t) = -h(t), \quad \text{para } t \in [0, L],$$

então

$$\int_0^{2L} h(t)\, dt = 0.$$

   (b) Mostre que se uma função $h : [0, 2L] \to \mathbb{R}$ é simétrica em relação à reta $t = L$, ou seja, se

$$h(2L - t) = h(t), \quad \text{para } t \in [0, L],$$

então

$$\int_0^{2L} h(t)\, dt = 2 \int_0^{L} h(t)\, dt.$$

   (c) Mostre que se $f : [0, 2L] \to \mathbb{R}$ é simétrica em relação à reta $t = L$, ou seja, tal que

$$f(t) = f(2L - t), \quad \text{para } t \in [0, L],$$

então os coeficientes de índice par da série de senos de Fourier são nulos, ou seja, $b_{2k} = 0$, para $k = 1, 2, 3 \ldots$ e os coeficientes de índice ímpar são dados por

$$b_{2k+1} = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L} dt \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

(Sugestão: use os itens (a) e (b).)

   (d) Mostre que se $f : [0, 2L] \to \mathbb{R}$ é simétrica em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$, ou seja, tal que

$$f(t) = -f(2L - t), \quad \text{para } t \in [0, L],$$

então os coeficientes de índice par da série de cossenos de Fourier são nulos, $a_{2k} = 0$, para $k = 0, 1, 2. \ldots$ e os coeficientes de índice ímpar são dados por

$$a_{2k+1} = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L} dt \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

(Sugestão: use os itens (a) e (b).)

2. Determine as representações da função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ em termos das séries de Fourier de senos e de cossenos de índices ímpares:

$$f(t) = \begin{cases} L/2 - t, & \text{se } 0 \leq t < L/2, \\ 0, & \text{se } L/2 \leq t < L. \end{cases}$$

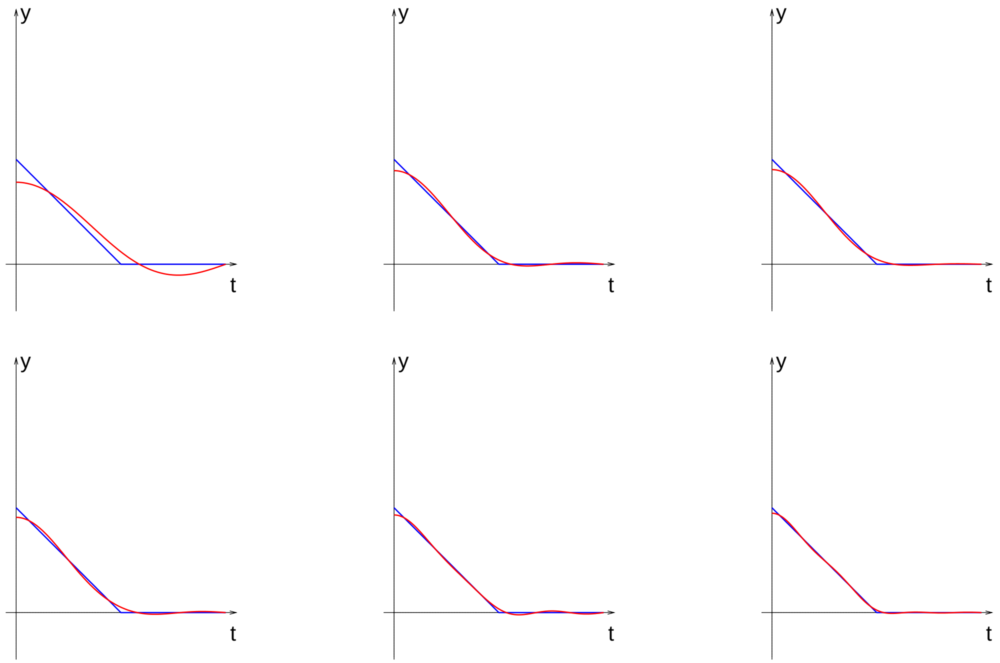

Figura 4: A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = L/2 - t$, se $t \in [0, L/2]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de cossenos de índices ímpares, para $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

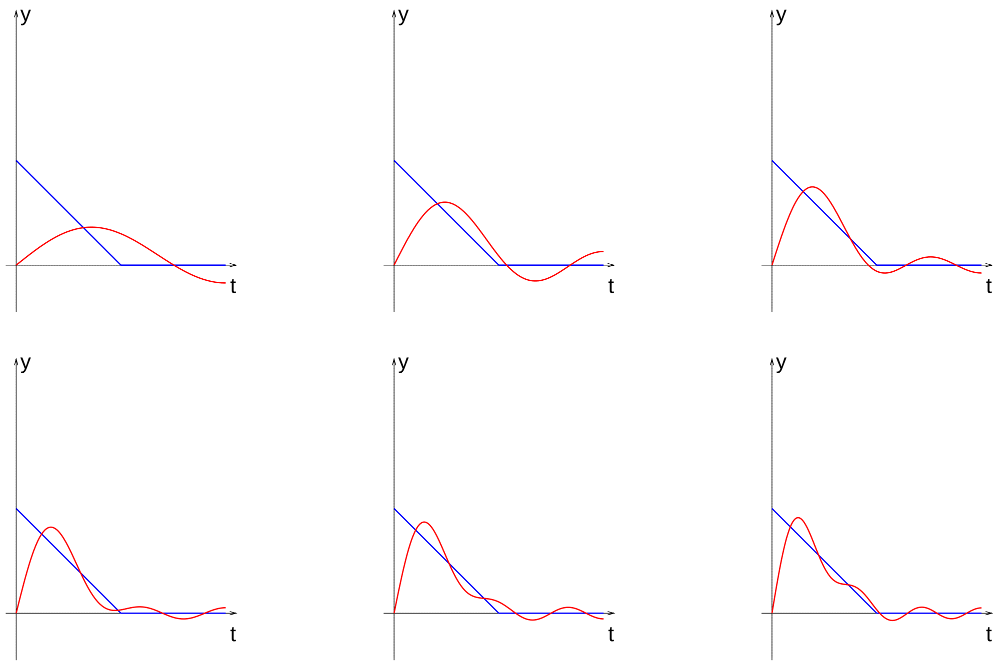

Figura 5: A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = L/2 - t$, se $t \in [0, L/2]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de senos de índices ímpares, para $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Respostas dos Exercícios

1. (a) Dividindo a integral em duas partes, fazendo a mudança de variáveis $t = 2L - s$ na segunda parte e usando o fato de que

$$h(2L - t) = -h(t), \quad \text{para } t \in [0, L]$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{2L} h(t)\,dt &= \int_0^L h(t)\,dt + \int_L^{2L} h(t)\,dt \\
&= \int_0^L h(t)\,dt + \int_L^0 h(2L - s)\,(-ds) \\
&= \int_0^L h(t)\,dt + \int_L^0 h(s)\,ds = 0
\end{aligned}$$

(b) Dividindo a integral em duas partes, fazendo a mudança de variáveis $t = 2L - s$ na segunda parte e usando o fato de que

$$h(2L - t) = h(t), \quad \text{para } t \in [0, L]$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{2L} h(t)\,dt &= \int_0^L h(t)\,dt + \int_L^{2L} h(t)\,dt \\
&= \int_0^L h(t)\,dt + \int_L^0 h(2L-s)\,(-ds) \\
&= \int_0^L h(t)\,dt - \int_L^0 h(s)\,ds = 2\int_0^L h(t)\,dt
\end{aligned}$$

(c) Para $h(t) = f(t)\operatorname{sen}\frac{2k\pi t}{2L}$ temos que

$$\begin{aligned}
h(2L-t) &= f(2L-t)\operatorname{sen}\frac{2k\pi(2L-t)}{2L} = f(t)\operatorname{sen}\left(2k\pi - \frac{2k\pi t}{2L}\right) = f(t)\operatorname{sen}\left(-\frac{2k\pi t}{2L}\right) \\
&= -f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{2L}\right) = -h(t)
\end{aligned}$$

Assim segue da aplicação do item (a) que $b_{2k} = 0$.
Para $h(t) = f(t)\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi t}{2L}$ temos que

$$\begin{aligned}
h(2L-t) &= f(2L-t)\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi(2L-t)}{2L} = f(t)\operatorname{sen}\left((2k+1)\pi - \frac{(2k+1)\pi t}{2L}\right) \\
&= f(t)\operatorname{sen}\left(\pi - \frac{(2k+1)\pi t}{2L}\right) = f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2L}\right) = h(t)
\end{aligned}$$

Assim segue da aplicação do item (b) que

$$b_{2k+1} = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi t}{2L}dt \quad \text{para } k = 0,1,2,\ldots$$

(d) Para $h(t) = f(t)\cos\frac{2k\pi t}{2L}$ temos que

$$\begin{aligned}
h(2L-t) &= f(2L-t)\cos\frac{2k\pi(2L-t)}{2L} = -f(t)\cos\left(2k\pi - \frac{2k\pi t}{2L}\right) = -f(t)\cos\left(-\frac{2k\pi t}{2L}\right) \\
&= -f(t)\cos\left(\frac{2k\pi t}{2L}\right) = -h(t)
\end{aligned}$$

Assim segue da aplicação do item (a) que $a_{2k} = 0$.
Para $h(t) = f(t)\cos\frac{(2k+1)\pi t}{2L}$ temos que

$$\begin{aligned}
h(2L-t) &= f(2L-t)\cos\frac{(2k+1)\pi(2L-t)}{2L} = -f(t)\cos\left((2k+1)\pi - \frac{(2k+1)\pi t}{2L}\right) \\
&= -f(t)\cos\left(\pi - \frac{(2k+1)\pi t}{2L}\right) = f(t)\cos\left(\frac{((2k+1)\pi t}{2L}\right) = h(t)
\end{aligned}$$

Assim segue da aplicação do item (b) que

$$a_{2k+1} = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\frac{(2k+1)\pi t}{2L}dt \quad \text{para } k = 0,1,2,\ldots$$

2. Lembrando que a integração deve ser feita no intervalo $[0, 2L]$:

$$
\begin{aligned}
a_{2k+1} &= \frac{L}{2} a_{2k+1}(f^{(0)}_{0,\frac{1}{4}}) - a_{2k+1}(f^{(1)}_{0,\frac{1}{4}}) \\
&= \frac{L}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{(2k+1)\pi} \operatorname{sen} s \Big|_0^{\frac{(2k+1)\pi}{4}} - 4 \cdot \frac{2L}{(2k+1)^2\pi^2} (s \operatorname{sen} s + \cos s) \Big|_0^{\frac{(2k+1)\pi}{4}} \\
&= \frac{8L}{(2k+1)^2\pi^2} \left(1 - \cos \frac{(2k+1)\pi}{4} \right)
\end{aligned}
$$

$$
f(t) = \frac{8L}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - \cos \frac{(2k+1)\pi}{4}}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{2k+1} &= \frac{L}{2} b_{2k+1}(f^{(0)}_{0,\frac{1}{4}}) - b_{2k+1}(f^{(1)}_{0,\frac{1}{4}}) \\
&= \frac{L}{2} \cdot 4 \cdot \frac{-1}{(2k+1)\pi} \cos s \Big|_0^{\frac{(2k+1)\pi}{4}} - 4 \cdot \frac{2L}{(2k+1)^2\pi^2} (-s \cos s + \operatorname{sen} s) \Big|_0^{\frac{(2k+1)\pi}{4}} \\
&= \frac{2L}{(2k+1)^2\pi^2} \left((2k+1)\pi - 4 \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{4} \right)
\end{aligned}
$$

$$
f(t) = \frac{2L}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)\pi - 4 \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{4}}{(2k+1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L}
$$