Séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

22 de novembro de 2007

Sumário

1 Séries de Fourier

Os conceitos de produto escalar e norma no $\mathbb{R}^n$ podem ser estendidos a certos espaços de funções.

Definição 1. Seja $\mathcal{CP}[a,b]$ o conjunto das funções reais contínuas por partes

$$f : [a,b] \to \mathbb{R},$$

considerando idênticas duas funções que diferem uma da outra apenas em um número finito de pontos.

(a) Definimos o **produto escalar** ou **interno** das funções f e g pertencentes a $\mathcal{CP}[a,b]$, como

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

(b) Para todo vetor $f \in \mathcal{CP}[a,b]$, definimos a **norma** de f denotada por $||f||$ como sendo

$$||f|| = \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

Por exemplo, se $f(t) = t, g(t) = e^t \in \mathcal{C}^0[0,1]$, então

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 te^t dt = te^t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = 1.$$

Além disso, $||f||^2 = \langle f, f\rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = 1/3$. Assim, $||f|| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{3}/3$.

O produto interno satisfaz as seguintes propriedades, que são análogas às do produto escalar em $\mathbb{R}^n$:

Proposição 1. *(a) Para todos os $f, g \in \mathcal{CP}[a,b]$, $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$.*

(b) Para todos os $f_1, f_2, g \in \mathcal{CP}[a,b]$, $\langle f_1 + f_2, g\rangle = \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle$;

(c) Para todos os $f, g \in \mathcal{CP}[a,b]$ e todo escalar α, $\langle \alpha f, g\rangle = \alpha \langle f, g\rangle$;

(d) Para todo $f \in \mathcal{CP}[a,b]$, $||f|| \geq 0$ e $f = 0$ se, e somente se, $||f|| = 0$.

(e) Para todo vetor $f \in \mathcal{CP}[a,b]$ e para todo escalar α, $||\alpha f|| = |\alpha|\,||f||$;

(f) Para todos os vetores $f, g \in \mathcal{CP}[a,b]$, $|\langle f,g\rangle| \leq ||f||\,||g||$ (Desigualdade de Cauchy-Schwarz);

(g) Para todos os vetores $f, g \in \mathcal{CP}[a,b]$, $||f+g|| \leq ||f||+||g||$ (Desigualdade triangular);

Demonstração. (a) $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt = \int_a^b g(t)f(t)dt = \langle g,f\rangle$.

(b) $\langle f+g,h\rangle = \int_a^b (f(t)+g(t))h(t)dt = \int_a^b f(t)h(t)dt + \int_a^b g(t)h(t)dt = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle$.

(c) $\langle \alpha f,g\rangle = \int_a^b \alpha f(t)g(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)g(t)dt = \alpha\langle f,g\rangle$.

(d) Se $f \neq \bar{0}$, então existe um subintervalo de $[a,b]$, onde f^2 é limitada inferiormente por um número maior do que zero. Assim, $\langle f,f\rangle = \int_a^b (f(t))^2 dt > 0$.

(e) $||\alpha f|| = \sqrt{\langle \alpha f, \alpha f\rangle} = \sqrt{\alpha^2\langle f,f\rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle f,f\rangle} = |\alpha|\,||f||$.

(f) A norma de $f+\lambda g$ é maior ou igual a zero, para qualquer escalar λ. Assim,

$$0 \leq ||f+\lambda g||^2 = \langle f+\lambda g, f+\lambda g\rangle = ||f||^2 + 2\lambda\langle f,g\rangle + \lambda^2||g||^2 = p(\lambda).$$

Temos um polinômio do segundo grau que é maior ou igual a zero para todo λ. Isto implica que

$$\Delta = 4(\langle f,g\rangle)^2 - 4||f||^2||g||^2 \leq 0.$$

Logo, $|\langle f,g\rangle| \leq ||f||\,||g||$.

(g) Pelo item anterior temos que

$$\begin{aligned} ||f+g||^2 &= \langle f+g,f+g\rangle = \langle f,f\rangle + \langle f,g\rangle + \langle g,f\rangle + \langle g,g\rangle \\ &= ||f||^2 + 2\langle f,g\rangle + ||g||^2 \\ &\leq ||f||^2 + 2|\langle f,g\rangle| + ||g||^2 \\ &\leq ||f||^2 + 2||f||\,||g|| + ||g||^2 \\ &\leq (||f||+||g||)^2; \end{aligned}$$

Tomando a raiz quadrada, segue o resultado.

□

Vamos, agora, estender ao espaço $\mathcal{CP}[a,b]$ o conceito de ortogonalidade.

Definição 2. Seja $\mathcal{CP}[a,b]$. Dizemos que um subconjunto não vazio $\mathcal{X}$ de $\mathcal{CP}[a,b]$ é **ortogonal** se para todo par f e g de elementos distintos de $\mathcal{X}$, $\langle f,g\rangle = 0$. Neste caso dizemos que os elementos de $\mathcal{X}$ são **ortogonais**.

Exemplo 1. Seja L um número real maior que zero. Seja $\mathcal{CP}[-L,L]$ o conjunto das funções contínuas por partes do intervalo $[-L,L]$ em $\mathbb{R}$ com o produto interno definido por

$$\langle f,g\rangle = \int_{-L}^{L} f(t)g(t)dt.$$

Vamos mostrar que o conjunto

$$\{1, \cos\frac{\pi t}{L}, \operatorname{sen}\frac{\pi t}{L}, \cos\frac{2\pi t}{L}, \operatorname{sen}\frac{2\pi t}{L}, \ldots, \cos\frac{n\pi t}{L}, \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}, \ldots\}$$

é ortogonal. Como as funções do conjunto, exceto a primeira, são funções cujas primitivas são periódicas de período igual a $2L/n$, então a integral de $-L$ a L destas funções é igual a zero e portanto elas são ortogonais à função constante 1.

$$\begin{aligned}
\left\langle \cos\frac{n\pi t}{L}, \operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L}\right\rangle &= \int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi t}{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L}dt = \frac{L}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ns\ \operatorname{sen} ms ds\\
&= \frac{L}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\operatorname{sen}(m+n)s + \operatorname{sen}(m-n)s]ds = 0
\end{aligned}$$

Para $m \neq n$ temos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \cos\frac{n\pi t}{L}, \cos\frac{m\pi t}{L}\right\rangle &= \int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi t}{L}\cos\frac{m\pi t}{L}dt = \frac{L}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ns\cos ms ds\\
&= \frac{L}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m+n)s + \cos(m-n)s]ds\\
&= \frac{L}{2\pi(m+n)}\operatorname{sen}(m+n)s\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{L}{2\pi(m-n)}\operatorname{sen}(m-n)s\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,\\
\left\langle \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}, \operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L}\right\rangle &= \int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L}dt = \frac{L}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} ns\ \operatorname{sen} ms ds\\
&= \frac{L}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[-\cos(m+n)s + \cos(m-n)s]ds = 0
\end{aligned}$$

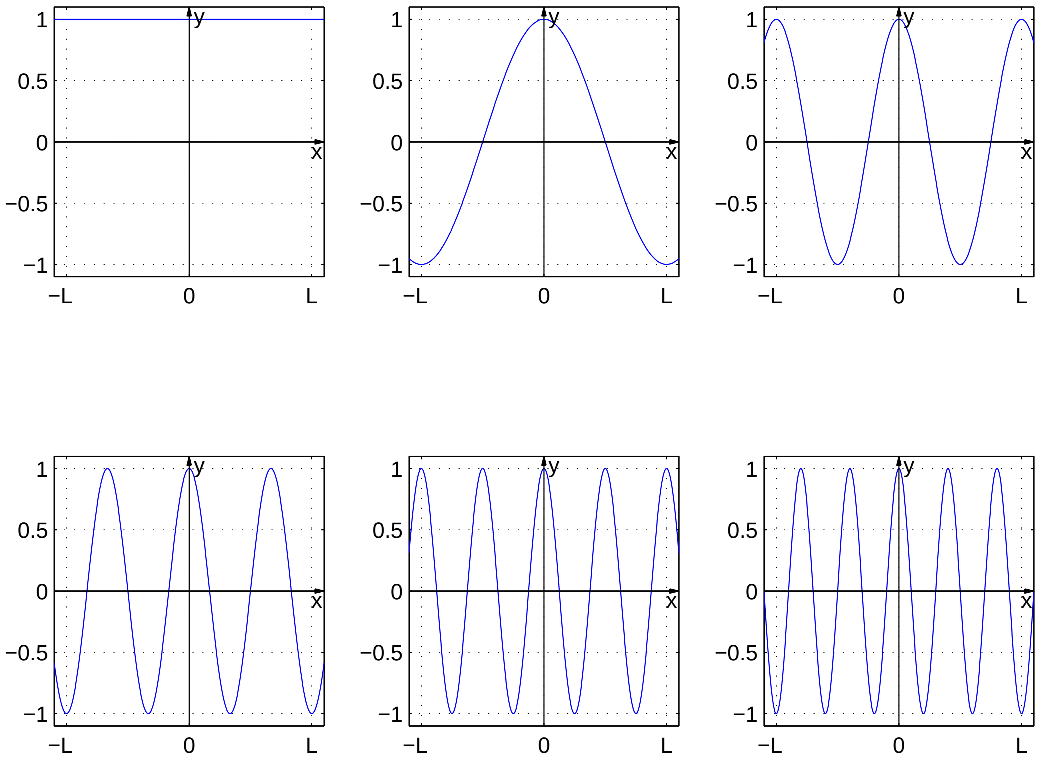

Figura 1: Gráficos de 1, $\cos\frac{\pi t}{L}$, $\cos\frac{2\pi t}{L}$, $\cos\frac{3\pi t}{L}$, $\cos\frac{4\pi t}{L}$, $\cos\frac{5\pi t}{L}$

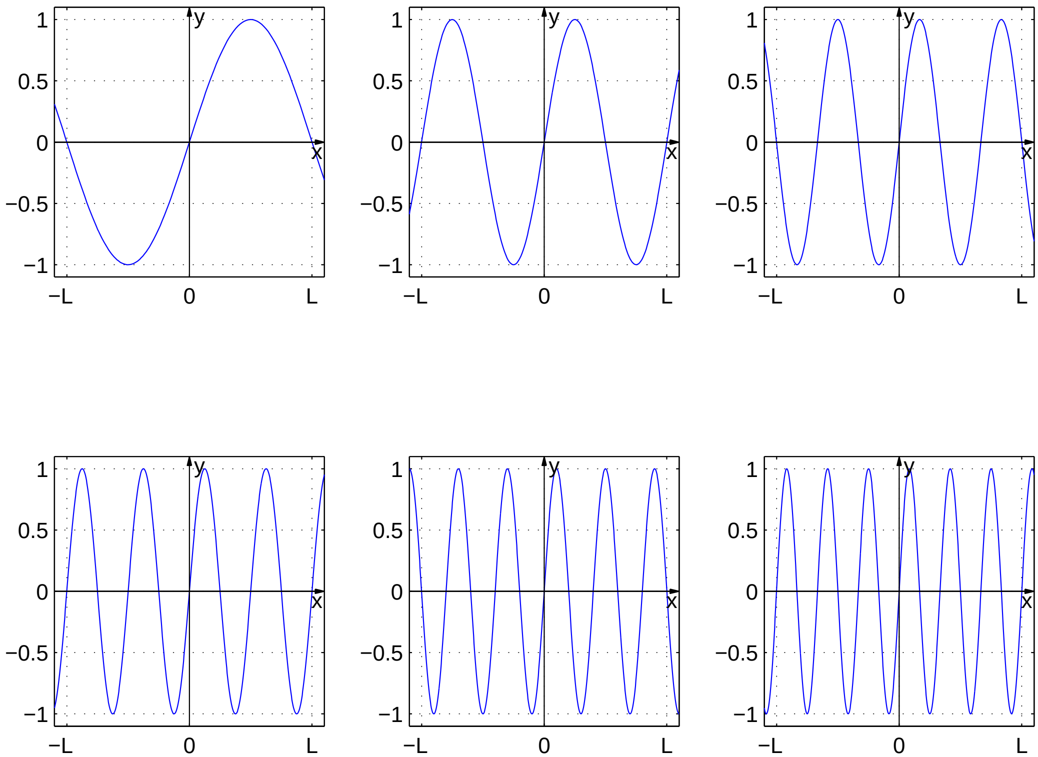

Figura 2: Gráficos de sen $\frac{\pi t}{L}$, sen $\frac{2\pi t}{L}$, sen $\frac{3\pi t}{L}$, sen $\frac{4\pi t}{L}$, sen $\frac{5\pi t}{L}$, sen $\frac{6\pi t}{L}$

Podemos estender a $\mathcal{CP}[a,b]$ o conceito de convergência de seqüência de números reais.

Definição 3. (a) Uma seqüência de funções $\{f_m\} = \{f_0, f_1, f_2, \ldots, f_m, \ldots\}$ de $\mathcal{CP}[a,b]$ converge para uma função f de $\mathcal{CP}[a,b]$ se

$$\lim_{m\to\infty} ||f_m - f|| = 0.$$

Neste caso escrevemos $\lim_{m\to\infty} f_m = f$.

(b) Uma **série de funções** $\sum_{m=0}^{\infty} f_m$ de $\mathcal{CP}[a,b]$ converge para uma função f de $\mathcal{CP}[a,b]$ se o limite da seqüência das somas parciais converge para f, ou seja,

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} f_n = f.$$

Proposição 2. *Se uma seqüência de funções $\{f_m\}$ de $\mathcal{CP}[a,b]$ converge para uma função f de $\mathcal{CP}[a,b]$, então esta função é única a menos dos seus valores em um número finito de pontos.*

Demonstração. Vamos supor que $\lim_{m\to\infty} f_m = f$ e $\lim_{m\to\infty} f_m = g$, então pela desigualdade triangular (Proposição 1 na página 2) temos que

$$||f - g|| \leq ||f - f_m|| + ||g - f_m||.$$

Passando ao limite obtemos que $||f - g|| = 0$ o que implica que $f = g$ a menos de um número finito de pontos. $\square$

Proposição 3. *(a) Se uma seqüência de funções $\{f_m\}$ de $\mathcal{CP}[a,b]$ converge para uma função f de $\mathbb{V}$, então para todo vetor g de $\mathbb{V}$ a seqüência de números reais $\{\langle f_m, g\rangle\}$ converge para $\langle f, g\rangle$. Ou seja, se $\lim_{m\to\infty} f_m = f$, então*

$$\lim_{m\to\infty} \langle f_m, g\rangle = \left\langle \lim_{m\to\infty} f_m, g \right\rangle.$$

(b) Se uma série de funções $\sum_{m=0}^{\infty} f_m$ *de* $\mathcal{CP}[a,b]$ *converge para uma função* f *de* $\mathcal{CP}[a,b]$, *então, para toda função* g *de* $\mathcal{CP}[a,b]$,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \langle f_m, g\rangle = \left\langle \sum_{m=0}^{\infty} f_m, g \right\rangle.$$

Demonstração. (a) Seja $f = \lim_{m\to\infty} f_m$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (Proposição 1 na página 2), temos que

$$|\langle f_m, g\rangle - \langle f, g\rangle| = |\langle f_m - f, g\rangle| \leq ||f_m - f||||g||.$$

Passando ao limite obtemos que $\lim_{m\to\infty} |\langle f_m, g\rangle - \langle f, g\rangle| = 0$. O que implica que $\lim_{m\to\infty} = \langle f, g\rangle$.

(b) É uma conseqüência imediata do item anterior.

□

Proposição 4. *Seja* $\mathcal{CP}[a,b]$, *o espaço das funções contínuas por partes no intervalo* $[a,b]$. *Seja* $\{g_0, g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots\}$ *um subconjunto de* $\mathbb{V}$ *de vetores ortogonais não nulos. Se*

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m,$$

então

$$c_m = \frac{\langle f, g_m\rangle}{||g_m||^2}, \quad \textit{para } m = 0, 1, 2, \ldots$$

Demonstração. Seja $f = \sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m$. Fazendo o produto escalar de f com g_n, para $n = 0, 1, 2\ldots$, obtemos que

$$\langle f, g_n\rangle = \left\langle \sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m, g_n \right\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \langle g_m, g_n\rangle = c_n ||g_n||^2,$$

pois como os vetores g_m são ortogonais $\langle g_m, g_n\rangle = 0$, se $m \neq n$. Assim,

$$c_n = \frac{\langle f, g_n\rangle}{||g_n||^2}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2 \ldots$$

$\square$

Exemplo 2. Seja L um número real maior que zero. Seja $\mathcal{CP}[-L, L]$ o conjunto das funções contínuas por partes do intervalo $[-L, L]$ em $\mathbb{R}$ com o produto interno definido por

$$\langle f, g\rangle = \int_{-L}^{L} f(t)g(t)dt.$$

Já mostramos no Exemplo 1 que o conjunto

$$\{1, \cos\frac{\pi t}{L}, \operatorname{sen}\frac{\pi t}{L}, \cos\frac{2\pi t}{L}, \operatorname{sen}\frac{2\pi t}{L}, \ldots, \cos\frac{n\pi t}{L}, \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}, \ldots\}$$

é ortogonal.

Vamos aplicar a Proposição 4 a este conjunto. Para isto vamos calcular as normas dos seus elementos.

$$\begin{aligned}
\langle 1, 1\rangle &= \int_{-L}^{L} dt = 2L \\
\left\langle \cos\frac{n\pi t}{L}, \cos\frac{n\pi t}{L}\right\rangle &= \int_{-L}^{L} \cos^2\frac{n\pi t}{L} dt = \frac{L}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 ns ds = \frac{L}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos 2ns] ds = L \\
\left\langle \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}, \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}\right\rangle &= \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}^2\frac{n\pi t}{L} dt = \frac{L}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 ns ds = \frac{L}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [1 - \cos 2ns] ds = L
\end{aligned}$$

Assim, para toda função $f \in \mathcal{CP}[-L, L]$ que possa ser escrita como a série

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi t}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L}, \tag{1}$$

teremos que os coeficientes da série serão dados por

$$a_m = \frac{\left\langle f, \cos\frac{m\pi t}{L}\right\rangle}{||\cos\frac{m\pi t}{L}||^2} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{m\pi t}{L} dt, \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

$$b_m = \frac{\left\langle f, \operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L}\right\rangle}{||\operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L}||^2} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L} dt, \quad \text{para } m = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

A série (1) com os coeficientes dados acima é chamada **Séries de Fourier**.

Na Proposição 4 fizemos a suposição de que a série $\sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m$ convergia para a função f. Vamos considerar o problema inverso. Dada uma função $f \in \mathcal{CP}[-L, L]$ podemos calcular os coeficientes a_m e b_m usando (2) e (3) e nos perguntar se a série obtida converge ou não. O teorema seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada por exemplo em [3], afirma que para toda função f contínua por partes em $[-L, L]$, a série de Fourier de f converge.

Teorema 5. *Seja L um número real maior que zero. Para toda função f pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $\mathcal{CP}[-L, L]$, a série de Fourier de f*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi t}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L},$$

em que

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{m\pi t}{L}dt \quad \textit{para } m = 0, 1, 2, \ldots \\ b_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L}dt, \quad \textit{para } m = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

converge para f na norma $||f|| = \left(\int_{-L}^{L}(f(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$. Ou seja, podemos escrever

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi t}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L}$$

Se uma função $f \in \mathcal{CP}[-L, L]$ é par, isto é, $f(-t) = f(t)$, para todo $t \in [-L, L]$, e pode ser escrita como a série

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi t}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L},$$

então os coeficientes obtidos no Exemplo 2 são dados por:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{m\pi t}{L}dt = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)\cos\frac{m\pi t}{L}dt, \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \ldots \\ b_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L}dt = 0 \quad \text{para } m = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Analogamente, se uma função $f \in \mathcal{CP}[-L, L]$ é ímpar, isto é, $f(-t) = -f(t)$, para todo $t \in [-L, L]$, e pode ser escrita como a série

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi t}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L},$$

então os coeficientes obtidos no Exemplo 2 são dados por:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt = 0 \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \ldots \\ b_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(t) \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} dt, \quad \text{para } m = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Para as funções f que são contínuas por partes em $[0, L]$ podemos prolongá-las de forma que elas se tornem par ou ímpar no intervalo $[-L, L]$ (verifique!).

Corolário 6. *Seja L um número real maior que zero. Para toda função f pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $\mathcal{CP}[0, L]$,*
a ***série de Fourier de cossenos*** *de f*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi t}{L},$$

e a ***série de Fourier de senos*** *de f*

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L},$$

em que

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt \quad \textit{para } m = 0, 1, 2, \ldots \\ b_m &= \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(t) \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} dt, \quad \textit{para } m = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

convergem para f na norma $||f|| = \left(\int_0^L (f(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$. Ou seja, podemos escrever

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi t}{L} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L}.$$

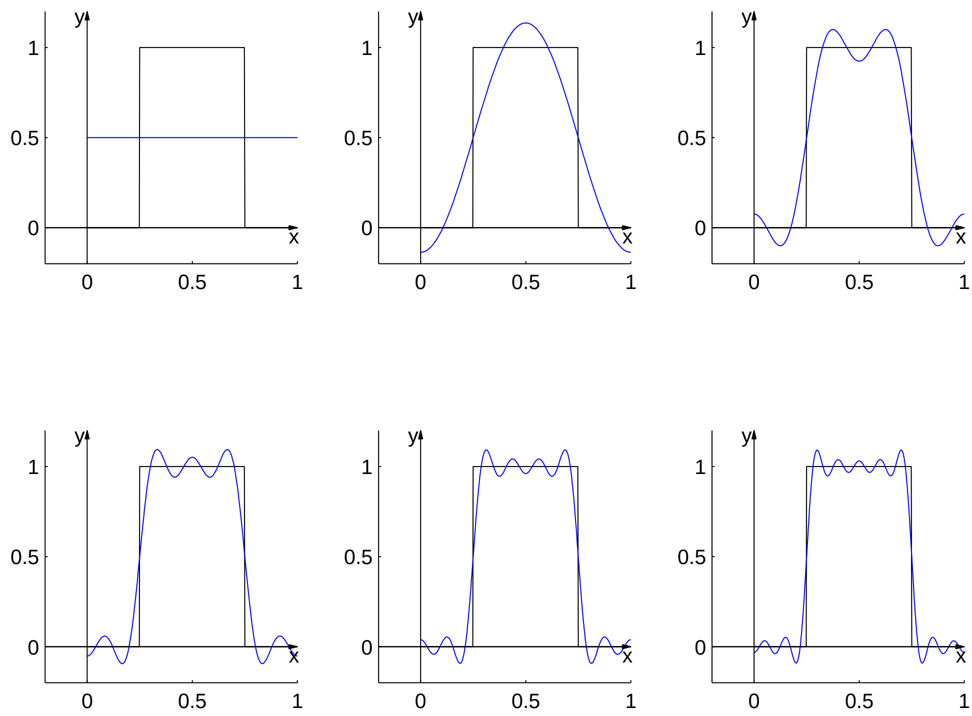

Figura 3: A função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1$, se $t \in [1/4, 3/4]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da série de Fourier de cossenos de f, para $n = 0, 2, 6, 10, 14, 18$

Exemplo 3. Seja L um número real maior que zero. Considere a função $f^{(0)}_{c,d} : [0, L] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f^{(0)}_{c,d}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } cL \leq t \leq dL, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \qquad \text{para } c \text{ e } d \text{ fixos satisfazendo } 0 \leq c < d \leq 1.$$

Vamos calcular as séries de Fourier de senos e de cossenos de $f^{(0)}_{c,d}$. Para a série de cossenos temos que

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)dt = \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} dt = 2(d-c), \\ a_m &= \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\cos\frac{m\pi t}{L}dt = \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} \cos\frac{m\pi t}{L}dt = \frac{2}{m\pi}\,\mathrm{sen}\, s\Big|_{m\pi c}^{m\pi d}, \quad \text{para } m = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

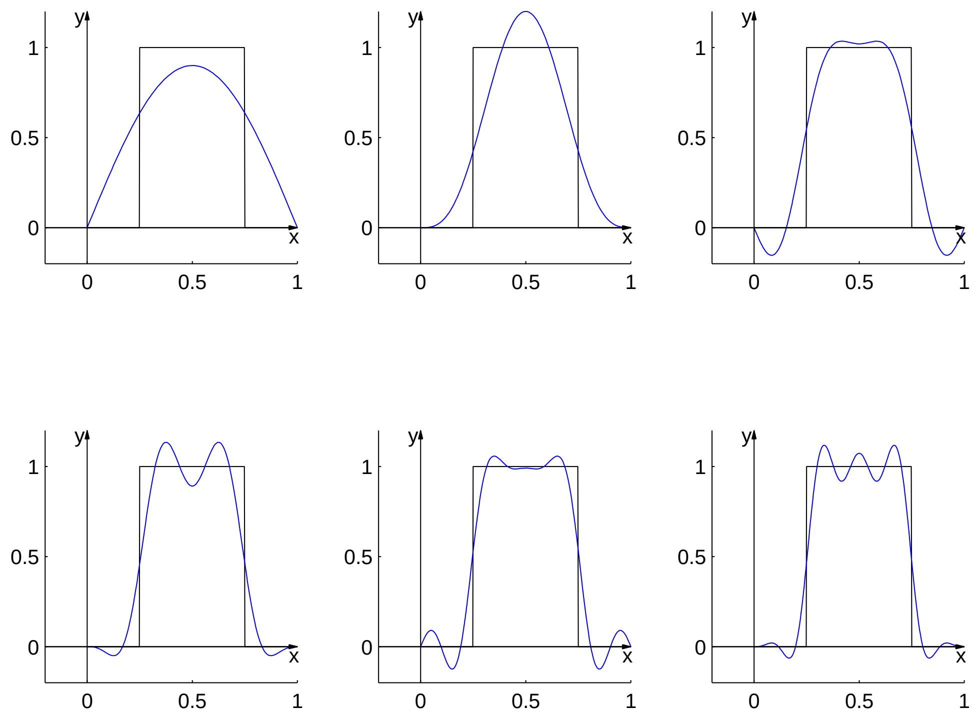

Figura 4: A função $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por $f(t)=1$, se $t\in[1/4,3/4]$ e $f(t)=0$, caso contrário e as somas parciais da série de Fourier de senos de f, para $n=1,\ldots,6$

Assim a série de Fourier de cossenos de f é

$$f_{c,d}^{(0)}(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos\frac{m\pi t}{L}=(d-c)+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} m\pi d-\operatorname{sen} m\pi c}{m}\cos\frac{m\pi t}{L}.$$

Observe que a série de Fourier de cossenos da função constante igual a 1, $f_{0,1}^{(0)}$, tem somente o primeiro termo diferente de zero que é igual a 1.

Para a série de senos temos que para $m=1,2,\ldots$,

$$b_m=\frac{2}{L}\int_{cL}^{dL}f(t)\operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L}dt=\frac{2}{L}\int_{cL}^{dL}\operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L}dt=-\frac{2}{m\pi}\cos s\Big|_{m\pi c}^{m\pi d}$$

Assim, a série de Fourier de senos de $f_{c,d}^{(0)}$ é dada por

$$f_{c,d}^{(0)}(t)=\sum_{m=1}^{\infty}b_m\operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L}=\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos m\pi c-\cos m\pi d}{m}\operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L}$$

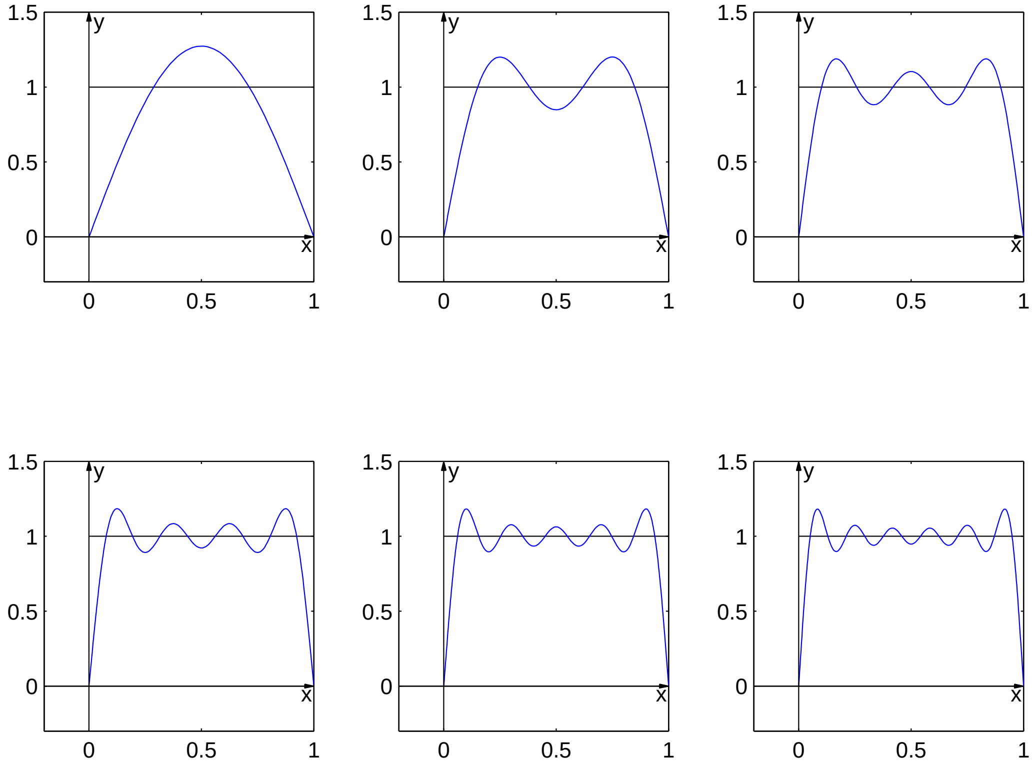

Figura 5: A função $f(t) = 1$ em $[0, 1]$ e as somas parciais da série de Fourier de senos de f, para $n = 1, 3, 5, 7, 9, 11$

Observe que para a função constante igual a 1, $f^{(0)}_{0,1}$ os termos de índice par são iguais a zero e neste caso a série de senos de $f^{(0)}_{0,1}$ é dada por

$$f^{(0)}_{0,1}(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \operatorname{sen} \frac{(2m-1)\pi t}{L}$$

Exemplo 4. Considere a função $f^{(1)}_{c,d} : [0, L] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f^{(1)}_{c,d}(t) = \begin{cases} t, & \text{se } cL \le t \le dL, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \qquad \text{para } c \text{ e } d \text{ fixos satisfazendo } 0 \le c < d \le 1.$$

Vamos calcular as séries de Fourier de senos e de cossenos de $f^{(1)}_{cd}$. Para a série de cossenos

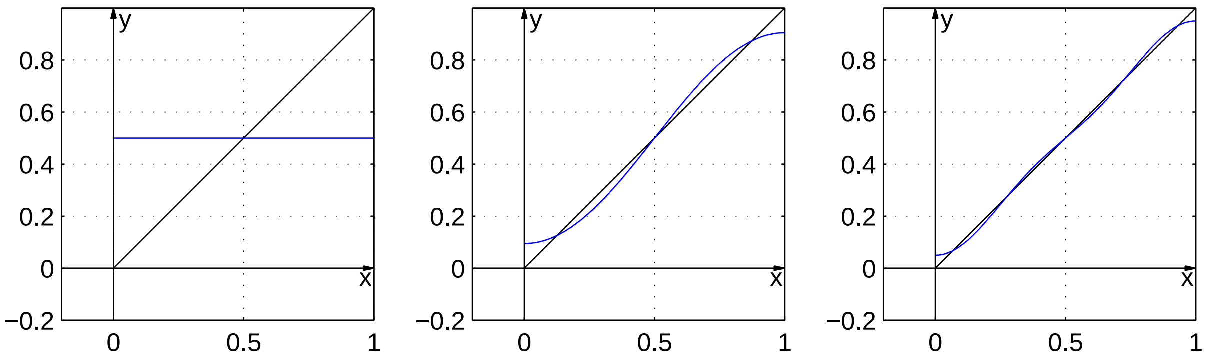

Figura 6: A função $f(t) = t$ em $[0, 1]$ e somas parciais da série de Fourier de cossenos para $n = 0, 1, 3$

temos que

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)dt = \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} t\,dt = L(d^2 - c^2) \\ a_m &= \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\cos\frac{m\pi t}{L}dt = \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} t\cos\frac{m\pi t}{L}dt = \frac{2L}{m^2\pi^2}\int_{m\pi c}^{m\pi d} s\cos s ds \\ &= \frac{2L}{m^2\pi^2}\left(s \text{ sen } s + \cos s\right)\Big|_{m\pi c}^{m\pi d} \end{aligned}$$

Assim a série de Fourier de cossenos de f é

$$f_{c,d}^{(1)}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi t}{L} = \frac{L(d^2 - c^2)}{2} + \frac{2L}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(s \text{ sen } s + \cos s\right)\Big|_{m\pi c}^{m\pi d}}{m^2}\cos\frac{m\pi t}{L}$$

Observe que para a função $f_{c,d}^{(1)}(t) = t$, para $0 \le t \le 1$, $f_{0,1}^{(1)}$, temos que

$$a_m = \frac{2L}{m^2\pi^2}((-1)^m - 1).$$

Assim os termos de índice par são iguais a zero e neste caso a série de cossenos de $f_{0,1}^{(1)}$ é dada por

$$f_{0,1}^{(1)}(t) = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos\frac{(2m-1)\pi t}{L},$$

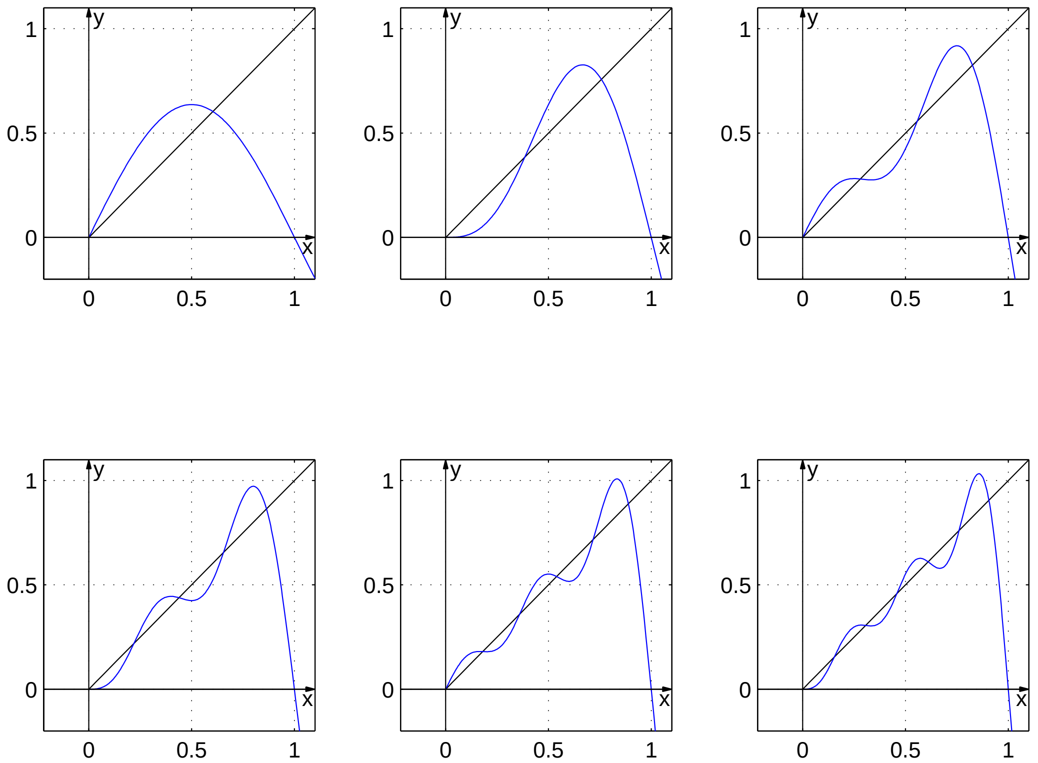

Figura 7: A função $f(t) = t$ em $[0, 1]$ e as somas parciais da série de Fourier de senos de f, para $n = 1, \dots, 6$

Para a série de senos temos que para $m = 1, 2, \dots,$

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{m\pi t}{L}dt = \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} t\,\mathrm{sen}\,\frac{m\pi t}{L}dt = \frac{2L}{m^2\pi^2}\int_{m\pi c}^{m\pi d} s\ \mathrm{sen}\,s ds \\ &= \frac{2L}{m^2\pi^2}\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\,s\right)\Big|_{m\pi c}^{m\pi d} \end{aligned}$$

Assim, a série de Fourier de senos de $f_{c,d}^{(1)}$ é dada por

$$f_{c,d}^{(1)}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m\,\mathrm{sen}\,\frac{m\pi t}{L} = \frac{2L}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\,s\right)\Big|_{m\pi c}^{m\pi d}}{m}\,\mathrm{sen}\,\frac{m\pi t}{L}$$

Observe que para a função $f(t) = t$, para $0 \le t \le 1$, $f_{01}^{(1)}$, temos que

$$b_m = \frac{2L}{m\pi}\left(-\cos m\pi\right) = \frac{(-1)^{m+1}2L}{m\pi}$$

e neste caso a série de senos de $f_{0,1}^{(1)}$ é dada por

$$f_{0,1}^{(1)}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} = \frac{2L}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L}$$

Com os coeficientes das funções destes dois exemplos podemos determinar as séries de Fourier de várias funções que são combinações lineares delas. Isto por que os coeficientes das séries dependem linearmente das funções, ou seja,

$$a_m(\alpha f + \beta g) = \alpha a_m(f) + \beta a_m(g) \quad \text{e} \quad a_m(\alpha f + \beta g) = \alpha a_m(f) + \beta a_m(g).$$

Por exemplo, a função

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 \le t \le L/2 \\ L - t, & \text{se } L/2 < t \le L \end{cases}$$

pode ser escrita como

$$f = f_{0,1/2}^{(1)} + L f_{1/2,1}^{(0)} - f_{1/2,1}^{(1)}.$$

Assim os coeficientes a_m e b_m podem ser calculados como

$$\begin{aligned} a_m(f) &= a_m(f_{0,1/2}^{(1)}) + L a_m(f_{1/2,1}^{(0)}) - a_m(f_{1/2,1}^{(1)}) \\ b_m(f) &= b_m(f_{0,1/2}^{(1)}) + L b_m(f_{1/2,1}^{(0)}) - b_m(f_{1/2,1}^{(1)}) \end{aligned}$$

Coeficientes das Séries de Fourier de Funções Elementares		
$f : [0, L] \to \mathbb{R}$	$a_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt$	$b_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} dt$
$f_{c,d}^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } cL \le t \le dL \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\begin{aligned} a_0 &= 2(d-c) \\ a_m &= \frac{2}{m\pi} \operatorname{sen} s \Big\vert_{m\pi c}^{m\pi d} \end{aligned}$	$b_m = -\frac{2}{m\pi} \cos s \Big\vert_{m\pi c}^{m\pi d}$
$f_{c,d}^{(1)}(t) = \begin{cases} t, & \text{se } cL \le t \le dL \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0 = L(d^2 - c^2)$ $a_m =$ $\frac{2L}{m^2\pi^2} (s \operatorname{sen} s + \cos s) \Big\vert_{m\pi c}^{m\pi d}$	$b_m =$ $\frac{2L}{m^2\pi^2} (-s \cos s + \operatorname{sen} s) \Big\vert_{m\pi c}^{m\pi d}$

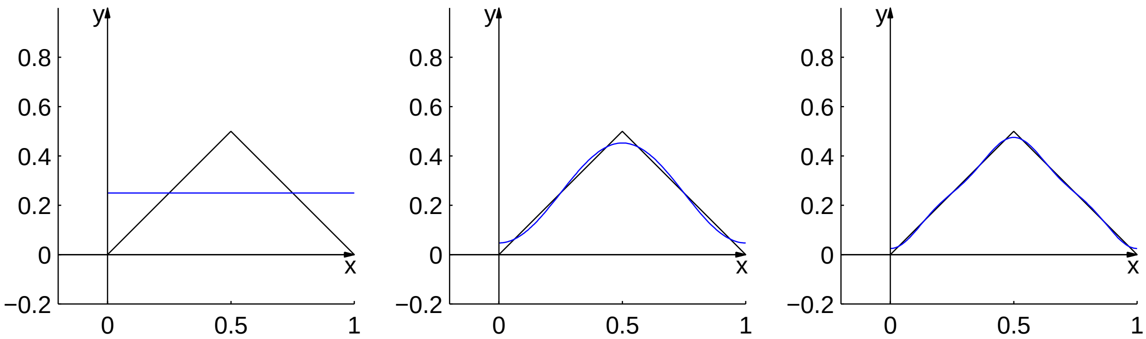

Figura 8: A função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dada por $f(t) = t$ se $t \in [0, 1/2]$ e $f(t) = 1 - t$ se $t \in [1/2, 1]$ e somas parciais da série de Fourier de cossenos para $n = 0, 2, 6$

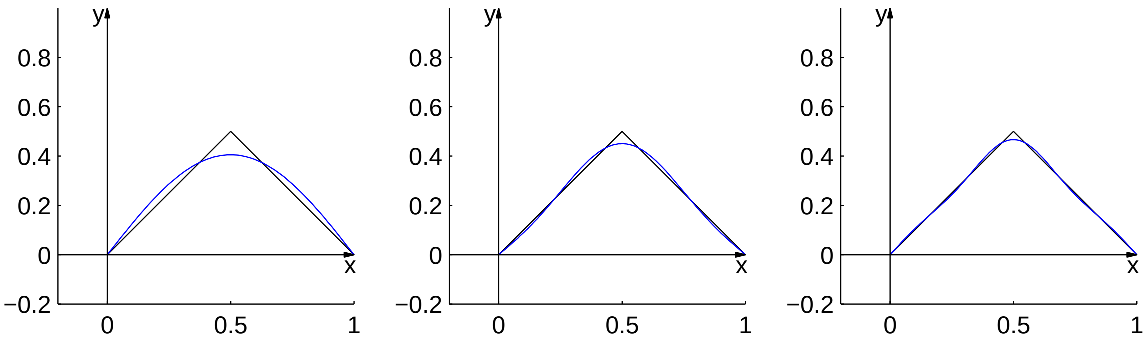

Figura 9: A função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dada por $f(t) = t$ se $t \in [0, 1/2]$ e $f(t) = 1 - t$ se $t \in [1/2, 1]$ e somas parciais da série de Fourier de senos para $n = 1, 3, 5$

Exercícios (respostas na página 56)

Ache as séries de Fourier de senos e de cossenos das funções dadas:

1.1. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < L/2, \\ 1, & \text{se } L/2 \leq x \leq L, \end{cases}$

1.2. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } L/4 \leq x < 3L/4, \\ 0, & \text{caso contrário}, \end{cases}$

1.3. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < L/2, \\ x, & \text{se } L/2 \leq x < L, \end{cases}$

1.4. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \le x < L/2 \\ L - x, & \text{se } L/2 \le x \le L \end{cases}$

1.5. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \le x < L/4 \\ L/4, & \text{se } L/4 \le x < 3L/4 \\ L - x, & \text{se } 3L/4 < x \le L \end{cases}$

Comandos do MATLAB®:

`>> V(i)=[]` elimina a componente `i` do vetor `V`.
`>> syms t` diz ao MATLAB® que a variável `t` é uma variável simbólica.
`>> f=expr` define uma função através da `expr` que deve ser uma expressão na variável simbólica `t` definida anteriormente.

Comandos do pacote GAAL:

`>>proj(g,f,a,b)` calcula

$$\frac{\langle f, g\rangle}{||g||^2} g(t) = \left(\frac{1}{\int_a^b (g(t))^2 dt} \int_a^b f(t)g(t)dt\right) g(t).$$

Por exemplo: `>>proj(cos(5*pi*t),f,-pi,pi)` calcula

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(5\pi t))^2 dt} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(5\pi t) f(t) dt\right) \cos(5\pi t) &= \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(5\pi t) f(t) dt\right) \cos(5\pi t) \\ &= a_5 \cos(5\pi t). \end{aligned}$$

`>>plotfproj(f,proj,a,b)` desenha as funções `f` e `proj(k)`, para `k` variando de 1 até o tamanho do vetor `proj`, no intervalo `[a,b]`.

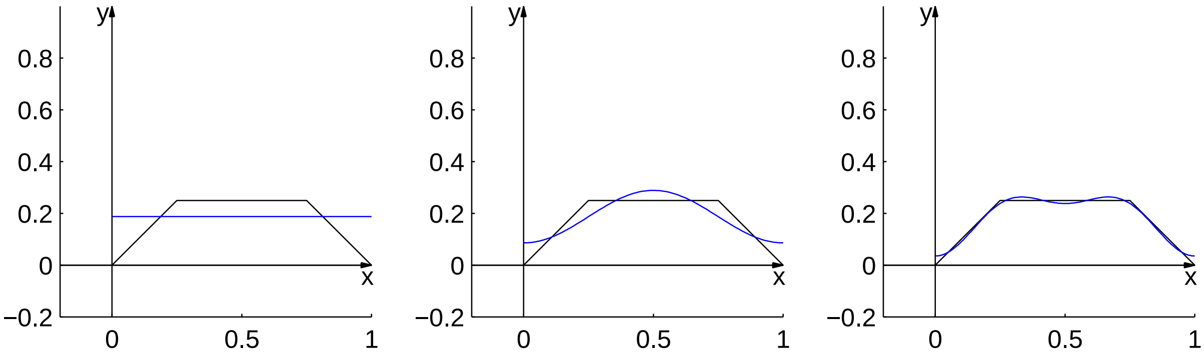

Figura 10: A função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t$, se $t \in [0, 1/4]$, $f(t) = 1/4$, se $t \in [1/4, 3/4]$ e $f(t) = 1 - t$, se $t \in [3/4, 1]$ e somas parciais da série de Fourier de cossenos para $n = 0, 1, 2$

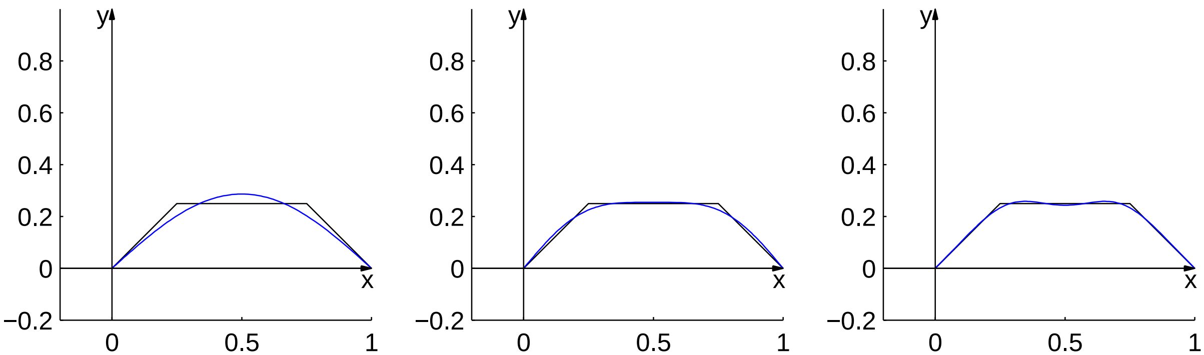

Figura 11: A função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t$, se $t \in [0, 1/4]$, $f(t) = 1/4$, se $t \in [1/4, 3/4]$ e $f(t) = 1 - t$, se $t \in [3/4, 1]$ e somas parciais da série de Fourier de senos para $n = 1, 3, 5$

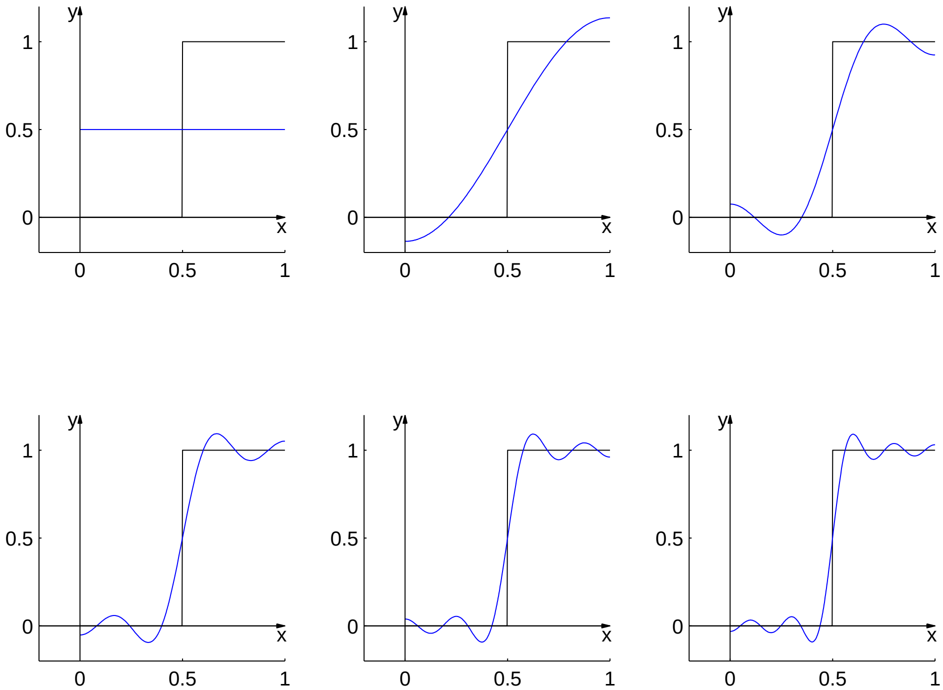

Figura 12: A função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1$, se $t \in [1/2, 1]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da série de Fourier de cossenos de f, para $n = 0, 1, 3, 5, 7, 9$

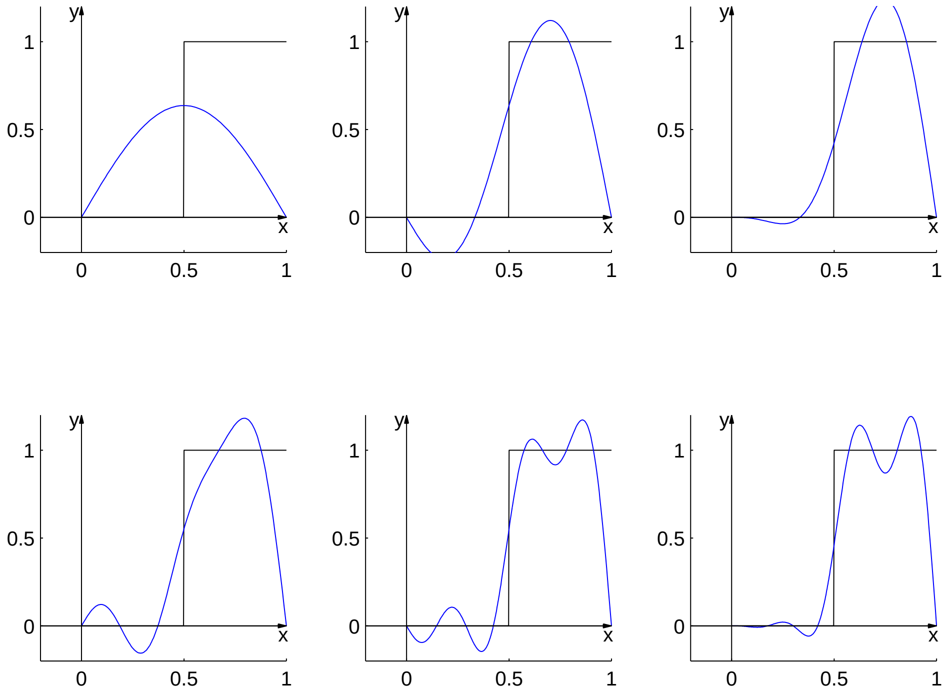

Figura 13: A função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1$, se $t \in [1/2, 1]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da série de Fourier de senos de f, para $n = 1, 2, 3, 5, 6, 7$

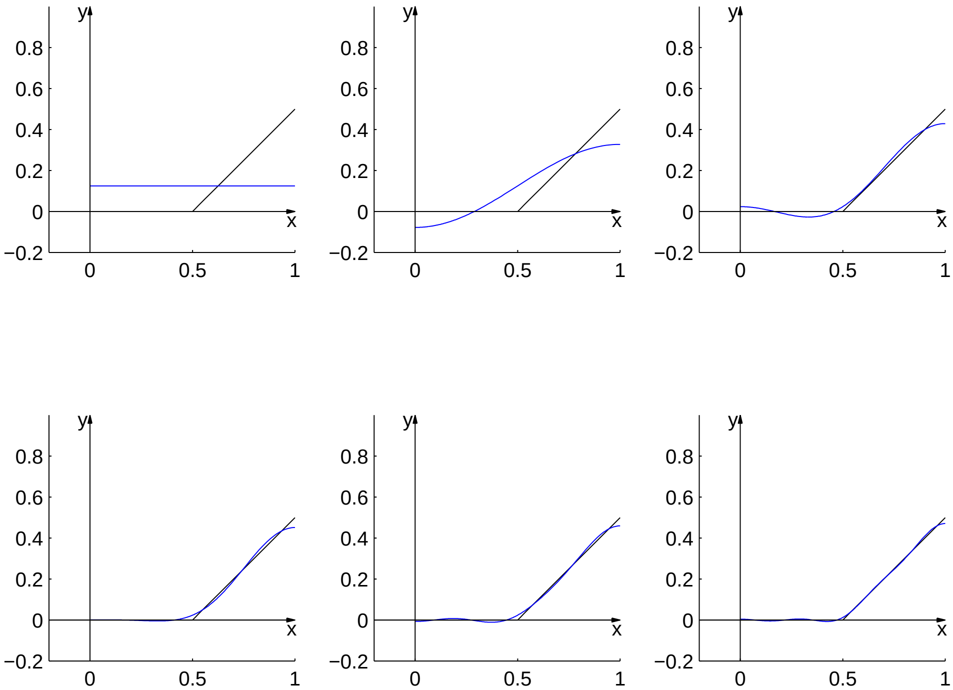

Figura 14: A função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t$, se $t \in [1/2, 1]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da série de Fourier de cossenos de f, para $n = 0, 1, 2, 3, 5, 6$

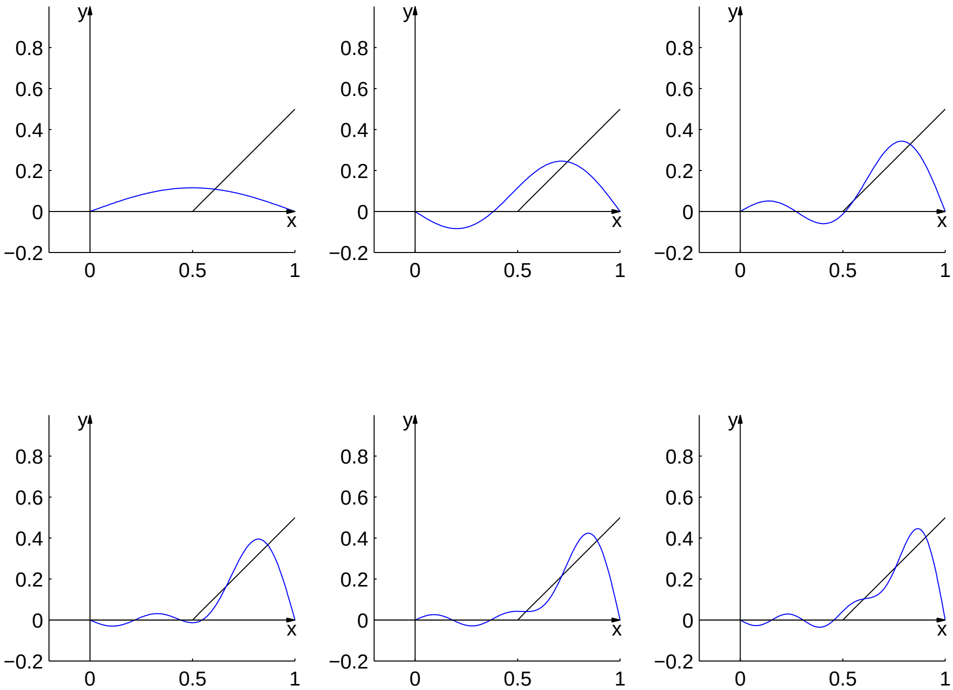

Figura 15: A função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t$, se $t \in [1/2, 1]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da série de Fourier de senos de f, para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

2 Equações Diferenciais Parciais

2.1 Equação do Calor em uma Barra

2.1.1 Extremidades a Temperaturas Fixas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2 \end{cases}$$

Vamos inicialmente resolver o problema com $T_1 = T_2 = 0$, que chamamos de **condições homogêneas**.

Condições Homogêneas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Vamos usar um método chamado **separação de variáveis**. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$\alpha^2 X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0,\ X(0) = 0,\ X(L) = 0 \\ T'(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

A primeira equação pode ter como soluções,
Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = C_1 + C_2 x$.

Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

As condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ implicam que $\lambda < 0$ (verifique!), mais que isso λ tem ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, a solução da primeira equação com as condições de fronteiras tem solução

$$X(x) = C_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},\ \text{para n=1,2,3,}\ldots.$$

Assim a segunda equação diferencial tem solução

$$T(t) = C_2 e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t},\ \text{para n=1,2,3,}\ldots.$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x,t) = X(x)T(t) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

Além disso, combinações lineares dessas soluções são solução

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

Mais que isso, pode-se provar que também séries

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$, temos que ter

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

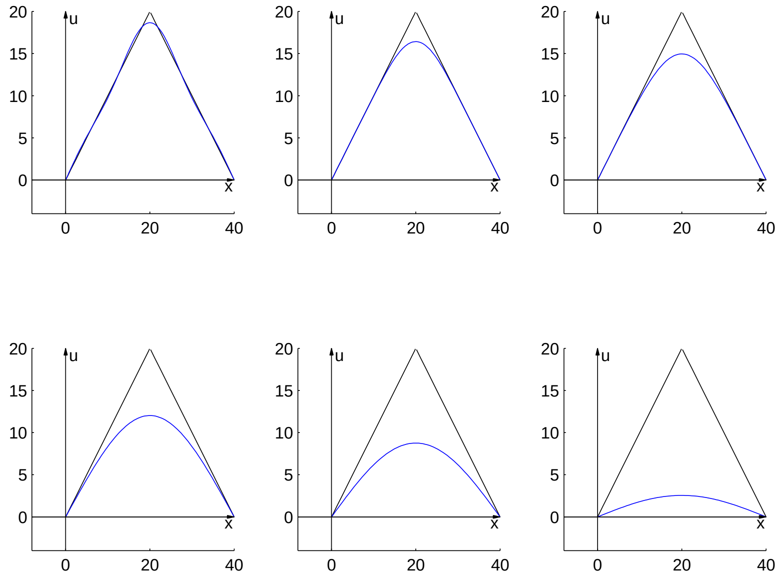

Figura 16: Solução da equação do calor do Exemplo 5 tomando apenas 3 termos não nulos da série, para $t = 0, 10, 20, 50, 100, 300$

Esta é a série de Fourier de senos de $f(x)$. Assim pelo Corolário 6 na página 11 se a função $f(x)$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $\mathcal{CP}[0, L]$, então os coeficientes são dados por

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,\ n = 1, 2, 3 \ldots$$

Observe que quando t tende a mais infinito a solução tende a zero.

Exemplo 5. Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente $\alpha = 1$, com as extremidades mantidas a temperatura de $0°$ C e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \le x < 20 \\ 40 - x, & \text{se } 20 \le x \le 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x),\ 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 0,\ u(40, t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}\, t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de $f(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{40})dx \\
&= c_n(f^{(1)}_{0,1/2}) + 40c_n(f^{(0)}_{1/2,1}) - c_n(f^{(1)}_{1/2,1}) \\
&= \frac{80}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \operatorname{sen} s\right)\Big|_0^{n\pi/2} - \frac{80}{n\pi}\cos s\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{80}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \operatorname{sen} s\right)\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} \\
&= \frac{160}{n^2\pi^2}\left(-\frac{n\pi}{2}\cos(n\pi/2) + \operatorname{sen}(n\pi/2)\right) + \frac{80}{n\pi}\cos(n\pi/2) \\
&= \frac{160 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},\ n = 1,2,3\ldots
\end{aligned}$$

Portanto a solução é

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}\, t} \\
&= \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{40} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{1600}\, t}
\end{aligned}$$

Condições Não Homogêneas

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\
u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2
\end{cases}$$

Observe que uma função somente de x tal que a segunda derivada é igual a zero satisfaz a equação do calor. Assim,

$$u(x,t) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)}{L}x$$

satisfaz a equação do calor e as condições de fronteira $u(0,t) = T_1$ e $u(L,t) = T_2$. O que sugere como solução do problema inicial

$$u(x,t) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)}{L}x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2\pi^2}{L^2}\, t}$$

Para satisfazer a condição inicial $u(x,0)=f(x)$, temos que ter

$$f(x)=T_1+\frac{(T_2-T_1)}{L}x+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

ou

$$f(x)-T_1-\frac{(T_2-T_1)}{L}x=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $f(x)-T_1-\frac{(T_2-T_1)}{L}x$. Assim pelo Corolário 6 na página 11 se a função $f(x)$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $\mathcal{CP}[0,L]$, então os coeficientes são dados por

$$c_n=\frac{2}{L}\int_0^L\left[f(x)-T_1-\frac{(T_2-T_1)}{L}x\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx,\ n=1,2,3\ldots$$

Observe que quando t tende a mais infinito a solução tende a solução

$$v(x,t)=T_1+\frac{(T_2-T_1)}{L}x$$

chamada **solução estacionária**.

Exemplo 6. Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente $\alpha=1$, com as extremidades mantidas a temperaturas de 10° C e 30° C e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x)=\begin{cases}10+2x, & \text{se } 0\le x<20\\ 70-x, & \text{se } 20\le x\le 40\end{cases}$$

Temos que resolver o problema

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ u(x,0)=f(x),\ 0<x<40\\ u(0,t)=10,\ u(40,t)=30\end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t)=10+\frac{x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

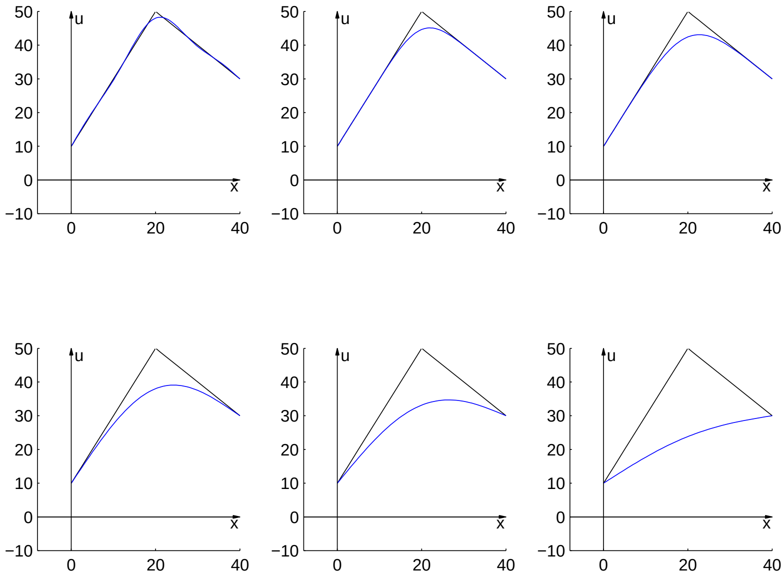

Figura 17: Solução da equação do calor do Exemplo 6 tomando apenas 3 termos não nulos da série, para $t = 0, 10, 20, 50, 100, 300$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de

$$f(x) - 10 - x/2 = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ 60 - \frac{3}{2}x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{3}{2}c_n(f^{(1)}_{0,1/2}) + 60c_n(f^{(0)}_{1/2,1}) - \frac{3}{2}c_n(f^{(1)}_{1/2,1}) \\ &= \frac{120}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \operatorname{sen} s\right)\Big|_0^{n\pi/2} - \frac{120}{n\pi}\cos s\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{120}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \operatorname{sen} s\right)\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} \\ &= \frac{240}{n^2\pi^2}\left(-\frac{n\pi}{2}\cos(n\pi/2) + \operatorname{sen}(n\pi/2)\right) + \frac{120}{n\pi}\cos(n\pi/2) \\ &= \frac{240 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},\ n = 1, 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= 10 + \frac{x}{2} + \frac{240}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t} \\ &= 10 + \frac{x}{2} + \frac{240}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{40} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{1600}t} \end{aligned}$$

Observe que quando t tende a mais infinito a solução tende a solução estacionária $v(x,t) = 10 + \frac{x}{2}$.

2.1.2 Barra Isolada nos Extremos

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$\alpha^2 X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0,\ X'(0) = 0,\ X'(L) = 0 \\ T'(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

A primeira equação pode ter como soluções,
Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = C_1 + C_2 x$.

Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

As condições de fronteira $X'(0) = 0$ e $X'(L) = 0$ implicam que $\lambda \leq 0$, mais que isso λ tem ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, a solução da primeira equação com as condições de fronteiras tem solução

$$X(x) = C_1 \cos \frac{n\pi x}{L}, \text{ para n=0,1,2,3,\ldots.}$$

Assim a segunda equação diferencial tem solução

$$T(t) = C_2 e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}, \text{ para n=0,1,2,3,\ldots.}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x,t) = X(x)T(t) = c_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

Além disso, combinações lineares dessas soluções são solução

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{N} c_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

Mais que isso, pode-se provar que também séries

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que ter

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de cossenos de $f(x)$. Assim pelo Corolário 6 na página 11 se a função $f(x)$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $\mathcal{CP}[0, L]$, então os coeficientes são dados por

$$c_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \; c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

Observe que a solução tende a $v(x,t) = c_0$, quando t tende a mais infinito, ou seja, a temperatura da barra vai tender a ficar constante e igual ao valor médio da temperatura inicial.

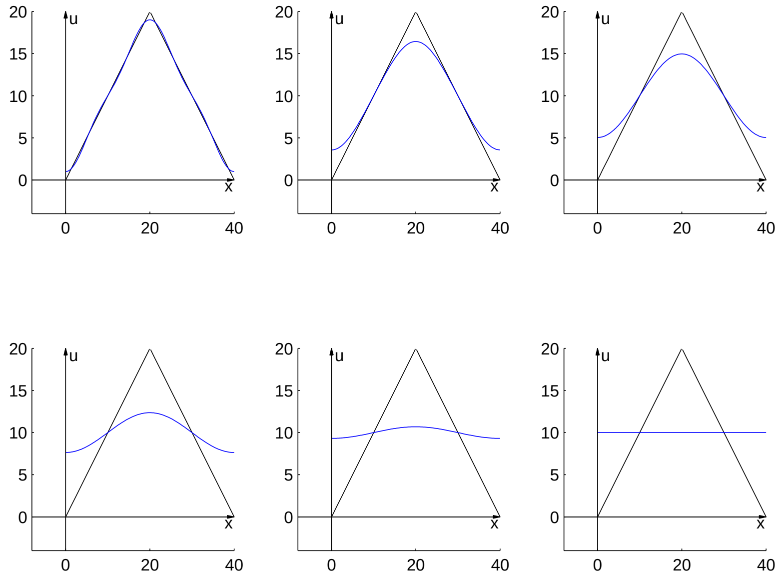

Figura 18: Solução da equação do calor do Exemplo 7 tomando apenas 3 termos não nulos da série, para $t = 0, 10, 20, 50, 100, 300$

Exemplo 7. Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente $\alpha = 1$, com as extremidades também isoladas, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, x) = \frac{\partial u}{\partial x}(40, t) = 0$$

e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ 40 - x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ u(x, 0) = f(x), \ 0 < x < 40 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(40, t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600} t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de cossenos de $f(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{40}\int_0^{40} f(x)dx = 10,\\
c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x)\cos\frac{n\pi x}{40}dx\\
&= 80\frac{2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n}{n^2\pi^2},\ n = 1, 2, 3\ldots
\end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= 10 + \frac{80}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{40}e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}\\
&= 10 + \frac{80}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n - 2}{4n^2}\cos\frac{n\pi x}{20}e^{-\frac{n^2\pi^2}{400}t}\\
&= 10 - \frac{80}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{20}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{400}t}
\end{aligned}$$

Observe que a solução tende a $v(x,t) = 10$, quando t tende a mais infinito.

2.2 Corda Elástica Com Extremidades Presas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

A solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x)$ e $g(x)$ não nulas.

2.2.1 Com Velocidade Inicial Nula

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0,\ X(0) = 0,\ X(L) = 0 \\ T''(t) - a^2\lambda T(t) = 0,\ T'(0) = 0 \end{cases}$$

A primeira equação com as condições de fronteira foi resolvida no problema do calor em uma barra e tem solução somente se

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, a solução da primeira equação com as condições de fronteiras tem solução

$$X(x) = C_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

A segunda equação diferencial com a condição inicial tem solução

$$T(t) = C_2 \cos \frac{an\pi t}{L}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x,t) = X(x)T(t) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{an\pi t}{L}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{an\pi t}{L}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que ter

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $f(x)$. Assim pelo Corolário 6 na página 11 se a função $f(x)$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $\mathcal{CP}[0,L]$, então os coeficientes são dados por

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,\ n = 1, 2, 3 \ldots$$

Observe que a solução $u(x,t)$ para cada x é periódica com período $\frac{2L}{a}$.

As soluções

$$u_n(x,t) = [\cos \frac{an\pi t}{L}] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

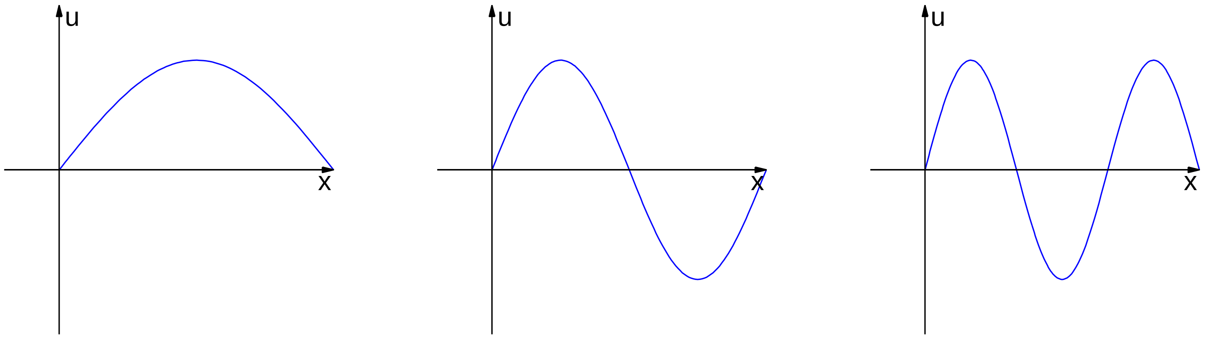

Figura 19: Modos naturais de vibração sen $\frac{n\pi x}{L}$, para $n = 1, 2, 3$

podem ser vistas como senos com amplitude variando de forma cossenoidal $A_n(t) = \cos \frac{an\pi t}{L}$ com freqüências $\frac{an\pi}{L}$ chamadas **freqüências naturais** da corda. Para cada n a função sen $\frac{n\pi x}{L}$ é chamada **modo natural de vibração** e o período $\frac{n\pi}{L}$ é chamado **comprimento de onda** do modo natural.

Exemplo 8. Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, presa nos lados, com coeficiente $a = 2$ solta do repouso de forma que o deslocamento inicial seja dado por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \le x < 20 \\ 40 - x, & \text{se } 20 \le x \le 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0, \ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \cos \frac{n\pi t}{20}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de $f(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{20} \int_0^{40} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} dx \\ &= \frac{160 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2}, \ n = 1, 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

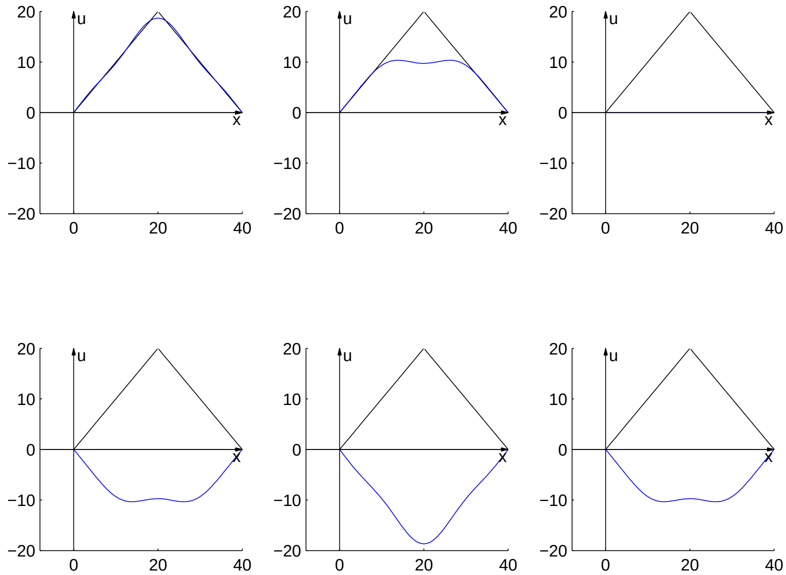

Figura 20: Solução do problema da corda elástica do Exemplo 8 tomando apenas 3 termos não nulos da série, para $t = 0, 5, 10, 15, 20, 25$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}\cos\frac{n\pi t}{20} \\ &= \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{40}\cos\frac{(2n+1)\pi t}{20} \end{aligned}$$

2.2.2 Com Deslocamento Inicial Nulo

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \ u(L,t) = 0 \end{array} \right.$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \ X(0) = 0, \ X(L) = 0 \\ T''(t) - a^2\lambda T(t) = 0, \ T(0) = 0 \end{cases}$$

A primeira equação com as condições de fronteira foi resolvida no problema do calor em uma barra e tem solução somente se

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, a solução da primeira equação com as condições de fronteiras tem solução

$$X(x) = C_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \ \text{para n=0,1,2,3,}\ldots.$$

A segunda equação diferencial com a condição inicial tem solução

$$T(t) = C_2 \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}, \ \text{para n=0,1,2,3,}\ldots.$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x,t) = X(x)T(t) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$, temos que ter

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{L} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $g(x)$. Assim pelo Corolário 6 na página 11 se a função $g(x)$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $\mathcal{CP}[0,L]$, então os coeficientes são dados por

$$\frac{an\pi}{L} c_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

Observe que a solução $u(x,t)$ para cada x é periódica com período $\frac{2L}{a}$.

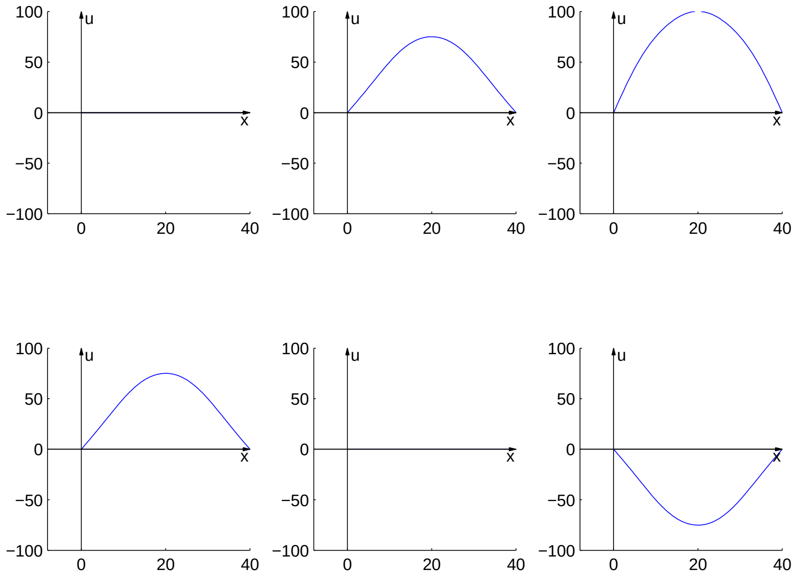

Figura 21: Solução do problema da corda elástica do Exemplo 9 tomando apenas 3 termos não nulos da série, para $t = 0, 5, 10, 15, 20, 25$

Exemplo 9. Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, presa nos lados, com coeficiente $a = 2$, sem deslocamento inicial mas com uma velocidade inicial dada por

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \le x < 20 \\ 40 - x, & \text{se } 20 \le x \le 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0,\ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20}$$

em que $\frac{n\pi}{20}c_n$ são os coeficientes da série de senos de $g(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{n\pi}{20}c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} dx \\ &= \frac{160 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}\ n = 1,2,3\ldots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{4800 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^3\pi^3},\ n = 1,2,3\ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{3200}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20} \\ &= \frac{3200}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{20} \end{aligned}$$

2.2.3 Caso Geral

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Como dissemos antes a solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x)$ e $g(x)$ não nulas, ou seja,

$$u(x,t) = u^{(f)}(x,t) + u^{(g)}(x,t).$$

Exemplo 10. Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, presa nos lados, com coeficiente $a = 2$, com deslocamento inicial $f(x)$ e com uma velocidade inicial $g(x)$ dados por

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ 40 - x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0,\ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \cos \frac{n\pi t}{20} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20}$$

em que c_n e $\frac{n\pi}{20} d_n$ são os coeficientes da série de senos de $f(x)$ e de $g(x)$, respectivamente, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{20} \int_0^{40} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} dx \\ &= \frac{160 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},\ n = 1, 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n\pi}{20} d_n &= \frac{1}{20} \int_0^{40} g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} dx \\ &= \frac{160 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}\ n = 1, 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

$$d_n = \frac{3200 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^3\pi^3},\ n = 1, 2, 3 \ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \cos \frac{n\pi t}{20} + \frac{3200}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20} \\ &= \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{40} \cos \frac{(2n+1)\pi t}{20} \\ &+ \frac{3200}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{20} \end{aligned}$$

2.3 Equação de Laplace num Retângulo

Vamos considerar o problema de valor de contorno em um retângulo gerado pela equação de Laplace

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,b) = g(x),\ 0 < x < a \\ u(0,y) = h(y),\ u(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

Este problema é chamado **problema de Dirichlet**. A solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x), g(x), h(y)$ e $k(y)$ não nulas.

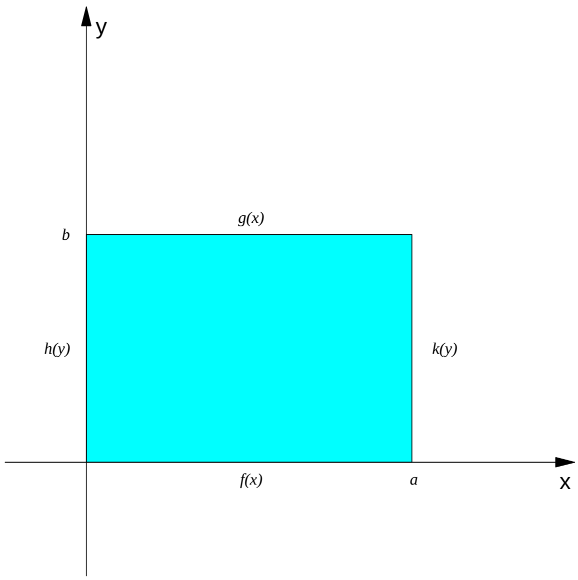

Figura 22: Região onde é resolvido o problema de Dirichlet

2.3.1 Apenas $k(y)$ Não Nula

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ u(x,0) = 0,\ u(x,b) = 0,\ 0 < x < a \\ u(0,y) = 0,\ u(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(t)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0,\ X(0) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0,\ Y(0) = 0,\ Y(b) = 0 \end{cases}$$

A segunda equação com as condições de fronteira tem solução somente se $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e neste caso a solução é da forma

$$Y(y) = C_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

A primeira equação diferencial com a condição $X(0) = 0$ tem solução

$$X(x) = C_2(e^{\frac{n\pi}{b}x} - e^{-\frac{n\pi}{b}x}) = \tilde{C}_2 \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x,y) = X(x)Y(y) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $u(a,y) = k(y)$, temos que ter

$$k(y) = u(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $k(y)$. Assim pelo Corolário 6 na página 11 se a função $k(y)$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $\mathcal{CP}[0,L]$, então os coeficientes são dados por

$$c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

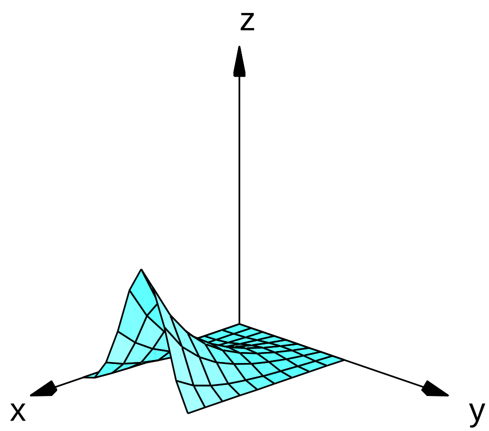

Figura 23: Solução da equação de Laplace do Exemplo 11 tomando apenas 3 termos não nulos da série

Exemplo 11. Vamos considerar a equação de Laplace num retângulo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,2) = 0,\ 0 < x < 3 \\ u(0,y) = 0,\ u(3,y) = k(y),\ 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$k(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \le y \le 1 \\ 2-y, & \text{se } 1 \le y \le 2 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{2}$$

em que $c_n \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})$ são os coeficientes da série de cossenos de $k(y)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2} &= \int_0^2 k(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} dx \\ &= \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},\ n = 1, 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2 \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2}},\ n = 1, 2, 3 \ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{2} \\ &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 \operatorname{senh} \frac{3(2n+1)\pi}{2}} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi y}{2} \operatorname{senh} \frac{(2n+1)\pi x}{2} \end{aligned}$$

2.3.2 Apenas $h(y)$ Não Nula

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,b) = 0,\ 0 < x < 3 \\ u(0,y) = h(y),\ u(a,y) = 0,\ 0 < y < 2 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(t)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \; X(a) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \; Y(0) = 0, \; Y(b) = 0 \end{cases}$$

A segunda equação com as condições de fronteira tem solução somente se $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e neste caso a solução é da forma

$$Y(y) = C_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

A primeira equação diferencial com a condição $X(a) = 0$ tem solução

$$X(x) = C_2(e^{\frac{n\pi}{b}(x-a)} - e^{-\frac{n\pi}{b}(x-a)}) = \tilde{C}_2 \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{b}(x-a))$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x,y) = X(x)Y(y) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{b}(x-a))$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{b}(x-a))$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $u(0, y) = h(y)$, temos que ter

$$h(y) = u(0, y) = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b}\right] \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $h(y)$. Assim pelo Corolário 6 na página 11 se a função $h(y)$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $\mathcal{CP}[0, L]$, então os coeficientes são dados por

$$-c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b h(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy,\ n = 1, 2, 3 \ldots$$

Podemos evitar o sinal de menos se escrevemos

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{b}(a - x))$$

e neste caso

$$c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b h(y) \operatorname{sen}(\frac{n\pi y}{b}) dy,\ n = 1, 2, 3 \ldots$$

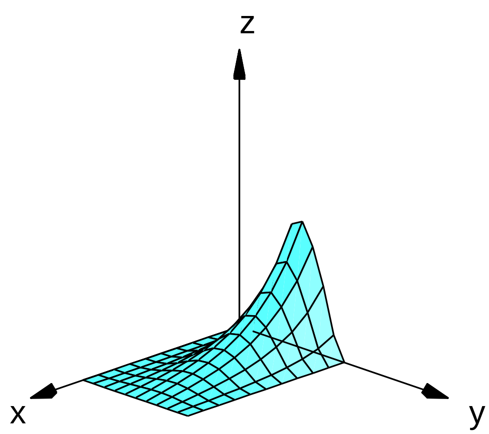

Figura 24: Solução da equação de Laplace do Exemplo 12 tomando apenas 3 termos não nulos da série

Exemplo 12. Vamos considerar a equação de Laplace num retângulo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,2) = 0,\ 0 < x < 3 \\ u(0,y) = h(y),\ u(3,y) = 0,\ 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$h(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \le y \le 1 \\ 2 - y, & \text{se } 1 \le y \le 2 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{2}(3-x))$$

em que $c_n \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})$ são os coeficientes da série de senos de $h(y)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2}) &= \int_0^2 h(y) \operatorname{sen}(\frac{n\pi y}{2}) dx \\ &= \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},\ n = 1,2,3\ldots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2 \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2}},\ n = 1,2,3\ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{2} \\ &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 \operatorname{senh} \frac{3(2n+1)\pi}{2}} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi y}{2} \operatorname{senh} \frac{(2n+1)\pi(3-x)}{2} \end{aligned}$$

2.3.3 Caso Geral

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,b) = g(x),\ 0 < x < a \\ u(0,y) = h(y),\ u(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

Como dissemos anteriormente a solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x), g(x), h(y)$ e $k(y)$ não nulas, ou seja,

$$u(x,y) = u^{(f)}(x,y) + u^{(g)}(x,y) + u^{(h)}(x,y) + u^{(k)}(x,y).$$

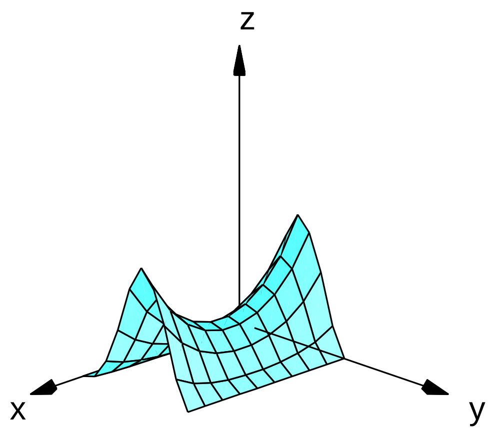

Figura 25: Solução da equação de Laplace do Exemplo 13 tomando apenas 3 termos não nulos da série

Exemplo 13. Vamos considerar a equação de Laplace num retângulo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,2) = 0,\ 0 < x < 3 \\ u(0,y) = h(y),\ u(3,y) = k(y),\ 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$h(y) = k(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \le y \le 1 \\ 2 - y, & \text{se } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \left(\operatorname{senh} \frac{n\pi x}{2} + \operatorname{senh} \frac{n\pi(3-x)}{2} \right)$$

em que $c_n \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2}$ são os coeficientes da série de senos de $k(y)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2} &= \int_0^2 k(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2}\, dx \\ &= \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},\ n = 1, 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{\operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2}) n^2\pi^2},\ n = 1, 2, 3 \ldots$$

Exercícios (respostas na página 57)

2.1. Encontre a temperatura $u(x,t)$ em uma barra de metal com 40 cm de comprimento, isolada dos lados e que está inicialmente a uma temperatura uniforme de 20° C, supondo que $\alpha = 1$ e que suas extremidades são mantidas a temperatura de 0° C.

2.2. Encontre a temperatura $u(x,t)$ em uma barra de metal com 40 cm de comprimento, isolada dos lados e que está inicialmente a uma temperatura uniforme de 20° C, supondo que $\alpha = 1$ e que suas extremidades são mantidas a temperatura de 0° C e 60° C respectivamente. Qual a temperatura estacionária?

2.3. Considere uma barra de comprimento L, $\alpha = 1$, isolada dos lados e que está inicialmente a temperatura dada por $u(x,0) = 3x/2$, $0 \leq x \leq 40$ e que as extremidades estão isoladas.

(i) Determine $u(x,t)$.

(ii) Qual a temperatura estacionária?

2.4. Determine o deslocamento, $u(x,t)$, de uma corda de 40 cm de comprimento, presa nos lados, com coeficiente $a = 2$ solta do repouso de forma que o deslocamento inicial seja dado por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 10 \\ 10, & \text{se } 10 \leq x < 30 \\ 40 - x, & \text{se } 30 < x \leq 40 \end{cases}$$

2.5. Determine o deslocamento, $u(x,t)$, de uma corda de 40 cm de comprimento, presa nos lados, com coeficiente $a = 2$ solta do repouso de forma que o deslocamento inicial seja dado por $\operatorname{sen}(\pi x/20)$, para $0 < x < 40$.

2.6. Determine o deslocamento, $u(x,t)$, de uma corda de 40 cm de comprimento, presa nos lados, com coeficiente $a = 2$ com deslocamento inicial nulo solta de forma que a velocidade inicial seja dada por

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 10 \\ 10, & \text{se } 10 \leq x < 30 \\ 40 - x, & \text{se } 30 < x \leq 40 \end{cases}$$

2.7. Determine o deslocamento, $u(x,t)$, de uma corda de 40 cm de comprimento, presa nos lados, com coeficiente $a = 2$ com deslocamento inicial nulo solta de forma que a velocidade inicial seja dada por $\operatorname{sen}(\pi x/20)$, para $0 < x < 40$.

2.8. Determine o deslocamento, $u(x,t)$, de uma corda de 40 cm de comprimento, presa nos lados, com coeficiente $a = 2$ com deslocamento inicial $f(x)$ solta de forma que a velocidade inicial seja $g(x)$ em que

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 10 \\ 10, & \text{se } 10 \leq x < 30 \\ 40 - x, & \text{se } 30 < x \leq 40 \end{cases}$$

2.9. Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,2) = 0,\ 0 < x < 3 \\ u(0,y) = 0,\ u(3,y) = k(y),\ 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$k(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \leq y < 1/2 \\ 1/2, & \text{se } 1/2 \leq y < 3/2 \\ 2 - y, & \text{se } 3/2 < y \leq 2 \end{cases}$$

2.10. Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,2) = 0,\ 0 < x < 3 \\ u(0,y) = h(y),\ u(3,y) = 0,\ 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$h(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \leq y < 1/2 \\ 1/2, & \text{se } 1/2 \leq y < 3/2 \\ 2 - y, & \text{se } 3/2 < y \leq 2 \end{cases}$$

2.11. Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,b) = g(x),\ 0 < x < 3 \\ u(0,y) = 0,\ u(a,y) = 0,\ 0 < y < 2 \end{cases}$$

2.12. Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,b) = 0,\ 0 < x < 3 \\ u(0,y) = 0,\ u(a,y) = 0,\ 0 < y < 2 \end{cases}$$

2.13. Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,b) = g(x),\ 0 < x < a \\ u(0,y) = h(y),\ u(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

2.14. Vamos considerar o problema de valor de contorno em um retângulo gerado pela equação de Laplace

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = f(x),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,b) = g(x),\ 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = h(y),\ \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

Este problema é chamado **problema de Neuman**. A solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x), g(x), h(y)$ e $k(y)$ não nulas.

(i) Resolva o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,b) = 0,\ 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

(ii) Resolva o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,b) = 0,\ 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = h(y),\ \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = 0,\ 0 < y < b \end{cases}$$

(iii) Por analogia escreva a solução dos problemas com somente $f(x)$ diferente de zero, com somente $g(x)$ diferente de zero e determine a solução do problema de Neuman no caso geral

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = f(x), \ \frac{\partial u}{\partial y}(x,b) = g(x), \ 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = h(y), \ \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = k(y), \ 0 < y < b \end{cases}$$

(iv) Explique por que este problema não tem solução única.

(v) Explique por que o problema só tem solução se

$$\int_0^b k(y)dy = \int_0^b h(y)dy = \int_0^a g(x)dx = \int_0^a f(x)dx = 0$$

Respostas dos Exercícios

1. Séries de Fourier (página 18)

1.1. $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{m\pi}{2}}{m} \cos\frac{m\pi x}{L} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \cos\frac{(2m+1)\pi x}{L}.$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{m\pi}{2} - (-1)^m}{m} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m - 1}{2m} \operatorname{sen}\frac{2m\pi x}{L} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \operatorname{sen}\frac{(2m+1)\pi x}{L} =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \operatorname{sen}\frac{(4m+2)\pi x}{L} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \operatorname{sen}\frac{(2m+1)\pi x}{L}$$

1.2. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{3m\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{m\pi}{4}}{m} \cos\frac{m\pi x}{L}.$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{m\pi}{4} - \cos\frac{3m\pi}{4}}{m} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}$$

1.3. $f(x) = \frac{3L}{8} + \frac{2L}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m\pi - \cos\frac{m\pi}{2} - \frac{m\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{m\pi}{2}}{m^2} \cos\frac{m\pi x}{L}.$

$$f(x) = \frac{2L}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\frac{m\pi}{2}\cos\frac{m\pi}{2} - m\pi\cos m\pi - \operatorname{sen}\frac{m\pi}{2}}{m^2} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}$$

1.4. $f(x) = \frac{L}{4} + \frac{2L}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\cos\frac{m\pi}{2} - 1 - (-1)^m}{m^2} \cos\frac{m\pi x}{L}$

$$= \frac{L}{4} + \frac{2L}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m - 2}{4m^2} \cos\frac{2m\pi x}{L}$$

$$= \frac{L}{4} - \frac{2L}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos\frac{(4m+2)\pi x}{L}.$$

$$f(x) = \frac{4L}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{m\pi}{2}}{m^2} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L} = \frac{4L}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} \operatorname{sen}\frac{(2m+1)\pi x}{L}$$

1.5. $f(x) = \frac{3L}{16} + \frac{2L}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{m\pi}{4} + \cos\frac{3m\pi}{4} - 1 - (-1)^m}{m^2} \cos\frac{m\pi x}{L}.$

$$f(x) = \frac{2L}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{m\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3m\pi}{4}}{m^2} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}$$

2. Equações Parciais (página 52)

2.1. Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0, \ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de $f(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{40})dx \\ &= 20 c_n(f_{0,1}^{(0)}) \\ &= -20\frac{2}{n\pi} \cos s \Big|_0^{n\pi} \\ &= \frac{40}{n\pi}(1-\cos(n\pi)) \\ &= \frac{40}{n\pi}(1-(-1)^n), \ n = 1,2,3\ldots \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t} \\ &= \frac{80}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen}(\frac{(2n+1)\pi}{40}x) e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{1600}t} \end{aligned}$$

2.2. Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0, \ u(40,t) = 60 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \frac{3x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de

$$f(x) - \frac{3x}{2} = 20 - \frac{3x}{2}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= 20 c_n(f_{0,1}^{(0)}) - \frac{3}{2} c_n(f_{0,1}^{(1)}) \\ &= \frac{40}{n\pi} \cos s \Big|_0^{n\pi} - \frac{120}{n^2\pi^2} \left(-s\cos s + \operatorname{sen} s\right) \Big|_0^{n\pi} \\ &= \frac{40}{n\pi}(\cos(n\pi) - 1) - \frac{120}{n^2\pi^2}\left(-n\pi\cos(n\pi)\right) \\ &= \frac{160((-1)^n - 1/4)}{n\pi}, \; n = 1, 2, 3\ldots \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x,t) = \frac{3x}{2} + \frac{160}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1/4}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

Quando t tende a mais infinito a solução tende a solução estacionária $v(x,t) = \dfrac{3x}{2}$.

2.3. (i) Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \; 0 < x < 40 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,t) = 0, \; \dfrac{\partial u}{\partial t}(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de cossenos de $f(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{40}\int_0^{40} f(x)dx = 30, \\ c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{40})dx \\ &= 80\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2},\ n=1,2,3\ldots \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= 30+\frac{80}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{40}e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t} \\ &= 30-\frac{160}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(\frac{(2n+1)\pi}{40}x)e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{1600}t} \end{aligned}$$

(ii) A solução tende a $v(x,t)=30$, quando t tende a mais infinito.

2.4. Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0)=f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\ 0<x<40 \\ u(0,t)=0,\ u(40,t)=0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}\cos\frac{n\pi t}{20}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de $f(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x)\operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{40})dx \\ &= \frac{80}{\pi^2}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2},\ n=1,2,3\ldots \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x,t) = \frac{80}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}\cos\frac{n\pi t}{20}$$

2.5.

$$u(x,t) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{20}x)\cos(\frac{\pi}{10}t)$$

2.6. Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0,\ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{20}$$

em que $\frac{n\pi}{20}c_n$ são os coeficientes da série de senos de $g(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{n\pi}{20}c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} g(x)\operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{40})dx \\ &= \frac{80}{\pi^2}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2}\ n = 1,2,3\ldots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{1600}{\pi^3}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^3},\ n = 1,2,3\ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x,t) = \frac{1600}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^3}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{20}$$

2.7.

$$u(x,t) = \frac{10}{\pi}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{20}x)\operatorname{sen}(\frac{\pi}{10}t)$$

2.8. Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0,\ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x)$ e $g(x)$ não nulas.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{an\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}$$

em que c_n e $\frac{n\pi}{20} d_n$ são os coeficientes da série de senos de $f(x)$ e de $g(x)$, respectivamente, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{40}) dx \\ &= \frac{80}{\pi^2} \frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2},\ n = 1,2,3\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n\pi}{20} d_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} g(x) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{40}) dx \\ &= \frac{80}{\pi^2} \frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2}\ n = 1,2,3\ldots \end{aligned}$$

$$d_n = \frac{1600}{\pi^3} \frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^3},\ n = 1,2,3\ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{80}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40} \cos\frac{n\pi t}{20} + \\ &\quad \frac{1600}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^3} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{20} \end{aligned}$$

2.9. A solução é então

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{2} \operatorname{senh}\frac{n\pi x}{3}$$

em que $c_n \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})$ são os coeficientes da série de senos de $k(y)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2}) &= \int_0^2 k(y) \operatorname{sen}(\frac{n\pi y}{2}) dx \\ &= \frac{4}{\pi^2} \frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2},\ n = 1,2,3\ldots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{4}{\pi^2}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2\operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})}, \; n = 1, 2, 3\ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2\operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{2}\operatorname{senh}\frac{n\pi x}{3} \\ &= \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\operatorname{senh}(\frac{3(2n+1)\pi}{2})(2n+1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi y}{2}\operatorname{senh}\frac{(2n+1)\pi x}{3} \end{aligned}$$

2.10. A solução é então

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{2}\operatorname{senh}(\frac{n\pi}{3}(3-x))$$

em que $c_n \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})$ são os coeficientes da série de senos de $h(y)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n\operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2}) &= \int_0^2 h(y)\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{2}dx \\ &= \frac{4}{\pi^2}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2}, \; n = 1, 2, 3\ldots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{4}{\pi^2}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2\operatorname{senh}\frac{3n\pi}{2}}, \; n = 1, 2, 3\ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2\operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{2}\operatorname{senh}\frac{n\pi x}{3} \\ &= \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\operatorname{senh}(\frac{3(2n+1)\pi}{2})(2n+1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi y}{2}\operatorname{senh}\frac{(2n+1)\pi(3-x)}{3} \end{aligned}$$

2.11. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(t)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \; X(0) = 0, \; X(a) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \; Y(0) = 0, \end{cases}$$

A primeira equação com as condições de fronteira tem solução somente se $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e neste caso a solução é da forma

$$X(x) = C_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Assim a segunda equação diferencial com a condição $Y(0) = 0$ tem solução

$$Y(y) = C_2(e^{\frac{n\pi}{a}y} - e^{-\frac{n\pi}{a}y}) = \tilde{C}_2 \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{a}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x, y) = X(x)Y(y) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{a}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{a}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x, b) = g(x)$, temos que ter

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{a} b) \right] \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{a} x).$$

Assim pelo Corolário 6 na página 11 se a função $g(x)$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $\mathcal{CP}[0, L]$, então os coeficientes são dados por

$$c_n \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{a} b) = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{a}) dx, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

2.12. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(t)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \; X(0) = 0; X(a) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \; Y(b) = 0 \end{cases}$$

A primeira equação com as condições de fronteira tem solução somente se $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e neste caso a solução é da forma

$$X(x) = C_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Assim a segunda equação diferencial com a condição $Y(b) = 0$ tem solução

$$Y(y) = C_2(e^{\frac{n\pi}{a}(y-b)} - e^{-\frac{n\pi}{a}(y-b)}) = \tilde{C}_2 \operatorname{senh} \frac{n\pi(y-b)}{a}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x,y) = X(x)Y(y) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi(y-b)}{a}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi(y-b)}{a}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x,0)=f(x)$, temos que ter

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{a} b) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{a} b) \right] \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{a} x).$$

Assim pelo Corolário 6 na página 11 se a função $f(x)$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $\mathcal{CP}[0,L]$, então os coeficientes são dados por

$$-c_n \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{a} b) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx,\ n = 1,2,3\ldots$$

Podemos evitar o sinal de menos se escrevemos

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi(b-y)}{a}$$

e neste caso

$$c_n \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{a} b) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{a}) dx,\ n = 1,2,3\ldots$$

2.13.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,b) = g(x),\ 0 < x < a \\ u(0,y) = h(y),\ u(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

$$u(x,y) = u^{(f)}(x,t) + u^{(g)}(x,t) + u^{(h)}(x,t) + u^{(k)}(x,t),$$

em que

$$u^{(f)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(f)} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi(b-y)}{a}$$

$$u^{(g)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(g)} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{a}$$

$$u^{(h)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(h)} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi(a-x)}{b}$$

$$u^{(k)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b}$$

com coeficientes dados por

$$c_n^{(f)} \operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} b = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx, \; n = 1,2,3\ldots$$

$$c_n^{(g)} \operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} b = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx, \; n = 1,2,3\ldots$$

$$c_n^{(h)} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b h(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy, \; n = 1,2,3\ldots$$

$$c_n^{(k)} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy, \; n = 1,2,3\ldots$$

2.14. (i) Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) - X(x)Y''(y) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(t)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \; X'(0) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \; Y'(0) = 0, \; Y'(b) = 0 \end{cases}$$

A segunda equação com as condições de fronteira tem solução somente se $\lambda = 0$ ou $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$, para $n = 1,2,3,\ldots$ e neste caso a solução é da forma

$$Y(y) = C_1, \quad Y(y) = C_1 \cos \frac{n\pi y}{b}, \; n = 1,2,3,\ldots$$

A primeira equação diferencial com a condição $X'(0) = 0$ tem solução

$$X(x) = C_2(e^{\frac{n\pi}{b}x} + e^{-\frac{n\pi}{b}x}) = \tilde{C}_2 \cosh \frac{n\pi x}{b}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x, y) = X(x)Y(y) = c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \cosh \frac{n\pi x}{b}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x, t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \cosh \frac{n\pi x}{b}$$

são soluções.
Mas para satisfazer a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = k(y)$, temos que ter

$$\begin{aligned} k(y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \cosh \frac{n\pi a}{b} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \frac{n\pi}{b} \cosh \frac{n\pi a}{b} \right] \cos \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Esta é a série de Fourier de cossenos de $k(y)$. Assim pelo Corolário 6 na página 11 se a função $k(y)$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $\mathcal{CP}[0, L]$, então os coeficientes são dados por

$$c_n \frac{n\pi}{b} \cosh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \cos(\frac{n\pi y}{b}) dy, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

e para ter solução o primeiro coeficiente da série de cossenos de $k(y)$ tem que ser igual a zero,

$$\int_0^b k(y) dy = 0$$

(ii) Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x, t) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) - X(x)Y''(y) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(t)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \ X'(a) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \ Y'(0) = 0, \ Y'(b) = 0 \end{cases}$$

A segunda equação com as condições de fronteira tem solução somente se $\lambda = 0$ ou $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e neste caso a solução é da forma

$$Y(y) = C_1, \quad Y(y) = C_1 \cos\frac{n\pi y}{b}, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

A primeira equação diferencial com a condição $X'(a) = 0$ tem solução

$$X(x) = C_2(e^{\frac{n\pi}{b}(x-a)} + e^{-\frac{n\pi}{b}(x-a)}) = \tilde{C}_2 \cosh\frac{n\pi(x-a)}{b}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x, y) = X(x)Y(y) = c_n \cos\frac{n\pi y}{b} \cosh\frac{n\pi(x-a)}{b}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x, y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi y}{b} \cosh\frac{n\pi(x-a)}{b}$$

são soluções.
Mas para satisfazer a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = h(y)$, temos que ter

$$\begin{aligned} h(y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} c_n \cos\frac{n\pi y}{b} \cosh\frac{n\pi a}{b} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \frac{n\pi}{b} \cosh\frac{n\pi a}{b}\right] \cos\frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Esta é a série de Fourier de cossenos de $h(y)$. Assim pelo Corolário 6 na página 11 se a função $k(y)$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $\mathcal{CP}[0, L]$, então os coeficientes são dados por

$$c_n \frac{n\pi}{b} \cosh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \cos \frac{n\pi y}{b} dy, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

e para ter solução o primeiro coeficiente da série de cossenos de $h(y)$ tem que ser igual a zero,

$$\int_0^b h(y) dy = 0$$

(iii)

$$u(x, y) = c_0 + u^{(f)}(x, t) + u^{(g)}(x, t) + u^{(h)}(x, t) + u^{(k)}(x, t),$$

em que

$$u^{(f)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{a} \cosh \frac{n\pi(y - b)}{a}$$

$$u^{(g)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{a} \cosh \frac{n\pi y}{a}$$

$$u^{(h)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \cosh \frac{n\pi(x - a)}{b}$$

$$u^{(k)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \cosh \frac{n\pi x}{b}$$

com coeficientes dados por

$$c_n^{(f)} \frac{n\pi}{a} \cosh \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi x}{a} dx, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$c_n^{(g)} \frac{n\pi}{a} \cosh \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \cos(\frac{n\pi x}{a}) dx, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$c_n^{(h)} \frac{n\pi}{b} \cosh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \cos \frac{n\pi y}{b} dy, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$c_n^{(k)} \frac{n\pi}{b} \cosh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \cos(\frac{n\pi y}{b}) dy, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

(iv) Por que uma constante somada a uma solução também é solução do problema.

(v) Pois para que tenha solução $f(x), g(x), h(y)$ e $k(y)$ tem que possuir uma série de cossenos com o termo constante igual a zero.

Referências

[1] William E. Boyce and Richard C. DiPrima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 7a. edition, 2002.

[2] Djairo Guedes de Figueiredo. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[3] Donald Kreider, Donald R. Ostberg, Robert C. Kuller, and Fred W. Perkins. *Introdução à Análise Linear*. Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1972.

[4] Erwin Kreiszig. *Matemática Superior*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2a. edition, 1985.

[5] Reginaldo J. Santos. *Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2007.