Teorema da Aproximação de Weierstrass

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

14 de julho de 2010

Teorema 1. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Para todo $\epsilon > 0$, existe um polinômio $p(t)$ tal que $|f(t) - p(t)| < \epsilon$, para todo $t \in [a, b]$.*

Demonstração. Seja $t = (1-x)a + xb$. Então $x = \dfrac{1}{b-a}(t-a)$ e $t \in [a, b]$ se, e somente se, $x \in [0, 1]$. Seja $\tilde{f} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $\tilde{f}(x) \;=\; f\left((1-x)a + xb\right)$. Seja

$$\tilde{p}(x) = \sum_{k=0}^{n} \tilde{f}(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{e} \quad p(t) = \tilde{p}\left(\frac{1}{b-a}(t-a)\right).$$

Este polinômio é chamado de **polinômio de Bernstein**.

Vamos usar o fato de que

$$\sum_{k \in A} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \le \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1, \tag{1}$$

para qualquer $A \subseteq \{0, 1, 2 \ldots, n\}$.

Como f é contínua existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2}$$

Sejam $b_1 = x - \delta$ e $b_2 = x + \delta$. Seja $M = \max_{x \in [0,1]} |\tilde{f}(x)| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$. Seja n tal que $4Me^{-2\delta^2 n} < \frac{\epsilon}{2}$. Vamos usar o seguinte fato que será demonstrado a seguir:

$$b_2 \leq \frac{k}{n} \leq 1 \text{ ou } 0 \leq \frac{k}{n} \leq b_1 \quad \Rightarrow \quad x^{\frac{k}{n}}(1-x)^{1-\frac{k}{n}} \leq e^{-2(x-b)^2} b^{\frac{k}{n}}(1-b)^{1-\frac{k}{n}}. \tag{3}$$

Então por (1), (2) e (3) temos que

$$\begin{aligned}
|\tilde{f}(x) - \tilde{p}(x)| = \left| \sum_{k=0}^{n} \tilde{f}(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \tilde{f}(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \leq \\
\leq \sum_{k=0}^{n} |\tilde{f}(\frac{k}{n}) - \tilde{f}(x)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \\
\leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{|\frac{k}{n} - x| \geq \delta} |\tilde{f}(\frac{k}{n}) - \tilde{f}(x)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \\
\leq \frac{\epsilon}{2} + 2M \sum_{\frac{k}{n} \geq b_2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + 2M \sum_{\frac{k}{n} \leq b_1} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \\
\leq \frac{\epsilon}{2} + 2Me^{-2\delta^2 n} \sum_{\frac{k}{n} \geq b_2} \binom{n}{k} b_2^k (1-b_2)^{n-k} + 2Me^{-2\delta^2 n} \sum_{\frac{k}{n} \leq b_1} \binom{n}{k} b_1^k (1-b_1)^{n-k} \\
\leq \frac{\epsilon}{2} + 4Me^{-2\delta^2 n} \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Lema 2. *Se* $0 \leq x < b \leq \frac{k}{n} \leq 1$ *ou* $0 \leq \frac{k}{n} \leq b < x \leq 1$, *então*

$$x^{\frac{k}{n}}(1-x)^{1-\frac{k}{n}} \leq e^{-2(x-b)^2} b^{\frac{k}{n}}(1-b)^{1-\frac{k}{n}}.$$

Demonstração. Precisamos mostrar que

$$\frac{x^{\frac{k}{n}}(1-x)^{1-\frac{k}{n}}}{b^{\frac{k}{n}}(1-b)^{1-\frac{k}{n}}} \leq e^{-2(x-b)^2},$$

ou aplicando-se o logaritmo nesta desigualdade, que

$$H(x) = \ln \frac{x^{\frac{k}{n}}(1-x)^{1-\frac{k}{n}}}{b^{\frac{k}{n}}(1-b)^{1-\frac{k}{n}}} + 2(x-b)^2 \leq 0.$$

Temos que $H(b) = 0$.

(a) Se $0 < x < b \leq \dfrac{k}{n} \leq 1$, vamos mostrar que $H'(x) \geq 0$. Como, para $0 < x < 1$, $x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$, então

$$H'(x) = \frac{\frac{k}{n} - x}{x(1-x)} + 4(x-b) \geq 4(\frac{k}{n} - x) + 4(x-b) = 4(\frac{k}{n} - b) \geq 0.$$

(b) Se $0 \leq \dfrac{k}{n} \leq b < x < 1$, vamos mostrar que $H'(x) \leq 0$. Como, para $0 < x < 1$, $4 \leq \dfrac{1}{x(1-x)}$, então

$$H'(x) = \frac{\frac{k}{n} - x}{x(1-x)} + 4(x-b) \leq \frac{\frac{k}{n} - x}{x(1-x)} + \frac{x-b}{x(1-x)} = \frac{\frac{k}{n} - b}{x(1-x)} \leq 0.$$

□

Referências

[1] Djairo Guedes de Figueiredo. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[2] Donald Kreider, Donald R. Ostberg, Robert C. Kuller, and Fred W. Perkins. *Introdução à Análise Linear*. Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1972.

[3] Elon L. Lima. *Curso de Análise*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1976.

[4] Literka. Weierstrass Approximation Theorem. Bernstein's Polynomials. Website. `http://www.literka.addr.com/mathcountry/approximation.htm`.