# Convergência Pontual da Série de Fourier


Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi


15 de julho de 2010

Lembramos que uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é **seccionalmente contínua** ou **contínua por partes** se $f(t)$ é contínua em $[a, b]$ exceto possivelmente em um número finito de pontos, nos quais os limites laterais existem. Vamos considerar duas funções contínuas por partes no intervalo $[a, b]$ iguais se elas diferem possivelmente apenas nos pontos de descontinuidade.

---

**Teorema 1.** *Seja $L$ um número real maior que zero. Para toda função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada $f'$ também seja contínua por partes, a série de Fourier de $f$*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L},$$

*em que*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \quad \textit{para } n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \textit{para } n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

*converge para $f$ nos pontos de $(-L, L)$ em que $f$ é contínua. Ou seja, podemos representar $f$ por sua série de Fourier:*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}, \quad \textit{para } t \in (-L, L)$$

---

***Demonstração.*** Vamos mostrar que a soma parcial da série tende a $f(x)$, se $x \in (-L, L)$ é um ponto de continuidade de $f$. Substituindo-se os coeficientes $a_n$ e $b_n$ na soma parcial da série,

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right),$$

obtemos

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t)dt \\ &+ \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{N} \left( \cos \frac{n\pi x}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt + \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt \right) = \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} (\cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi t}{L} + \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}) \right) f(t)dt = \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos \frac{n\pi(t-x)}{L} \right) f(t)dt \end{aligned} \tag{1}$$

Mas

$$\operatorname{sen}(N + \frac{1}{2})s - \operatorname{sen} \frac{1}{2}s = \sum_{n=1}^{N} \left( \operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})s - \operatorname{sen}(n - \frac{1}{2})s \right) = 2 \operatorname{sen} \frac{s}{2} \sum_{n=1}^{N} \cos ns$$

Logo

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos ns = \frac{\operatorname{sen}(N + \frac{1}{2})s}{2 \operatorname{sen} \frac{s}{2}}.$$

Substituindo-se $s$ por $\dfrac{\pi(t-x)}{L}$ obtemos

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos \frac{n\pi(t-x)}{L} = \frac{\operatorname{sen}(N + \frac{1}{2}) \frac{\pi(t-x)}{L}}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi(t-x)}{2L}}. \tag{2}$$

Substituindo-se (2) em (1) obtemos

$$S_N(x) = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \frac{\operatorname{sen}(N + \frac{1}{2}) \frac{\pi(t-x)}{L}}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi(t-x)}{2L}} f(t)dt$$

Substituindo-se $f$ pela sua extensão periódica de período $2L$, $\tilde{f}$, usando o fato de que neste caso as integrais anteriores podem ser calculadas de $-L+x$ até $L+x$ e fazendo a mudança de variáveis $s = t - x$ obtemos

$$S_N(x) = \frac{1}{L}\int_{-L+x}^{L+x} \frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})\dfrac{\pi(t-x)}{L}}{2\operatorname{sen}\dfrac{\pi(t-x)}{2L}}\tilde{f}(t)dt =$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})\dfrac{\pi s}{L}}{2\operatorname{sen}\dfrac{\pi s}{2L}}\tilde{f}(x+s)ds \qquad (3)$$

Tomando-se $f(x) = 1$ em (3) obtemos

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})\dfrac{\pi s}{L}}{2\operatorname{sen}\dfrac{\pi s}{2L}} = 1. \qquad (4)$$

Assim de (3) e (4) temos que

$$S_N(x) - f(x) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \left(\tilde{f}(x+s) - f(x)\right) \frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})\dfrac{\pi s}{L}}{2\operatorname{sen}\dfrac{\pi s}{2L}}ds =$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \frac{\tilde{f}(x+s) - \tilde{f}(x)}{s} \frac{\dfrac{s}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi s}{2L}} \operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})\frac{\pi s}{L}ds. \qquad (5)$$

Como $\tilde{f}$ é contínua por partes com derivada $\tilde{f}'$ também contínua por partes, então para $x \in (-L, L)$ tal que $f(x)$ é contínua temos que a função

$$g(s) = \frac{\tilde{f}(x+s) - \tilde{f}(x)}{s} \frac{\dfrac{s}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi s}{2L}}$$

é contínua por partes. Pois, pelo Teorema do valor médio, se $f'$ é contínua em $x$, então $g$ é contínua em $s = 0$. Se $f$ não é contínua em $x$, então os limites laterais de $f'(\xi)$ quando $\xi$ tende a zero existem. Assim segue do lema que apresentaremos a seguir que

$$\lim_{N\to\infty}(S_N(x) - f(x)) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(s)\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})\frac{\pi s}{L}ds = 0.$$

$\square$

**Lema 2 (Riemann-Lebesgue).** *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua por partes, então*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b g(s) \operatorname{sen} \lambda s \, ds = 0$$

***Demonstração.*** Seja

$$I(\lambda) = \int_a^b g(s) \operatorname{sen} \lambda s \, ds \tag{6}$$

Vamos supor inicialmente que $g$ seja contínua. Fazendo-se a mudança de variáveis $s = t + \dfrac{\pi}{\lambda}$ obtemos

$$I(\lambda) = -\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g(t + \frac{\pi}{\lambda}) \operatorname{sen} \lambda t \, dt \tag{7}$$

Seja $M = \max\limits_{s \in [a-\pi, b]} g(s)$. Somando-se (6) e (7) e calculando-se o módulo obtemos que

$$\begin{aligned}
|2I(\lambda)| &= \left| \int_a^b g(s) \operatorname{sen} \lambda s \, ds - \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g(s + \frac{\pi}{\lambda}) \operatorname{sen} \lambda s \, ds \right| = \\
&\leq \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a} |g(s + \frac{\pi}{\lambda})| \, ds + \int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} |g(s) - g(s + \frac{\pi}{\lambda})| \, ds + \int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^{b} |g(s + \frac{\pi}{\lambda})| \, ds \\
&\leq \frac{2M\pi}{\lambda} + \int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} |g(s) - g(s + \frac{\pi}{\lambda})| \, ds < 2\epsilon,
\end{aligned}$$

para $\lambda > \frac{2M\pi}{\epsilon}$ tal que $|g(s) - g(s + \dfrac{\pi}{\lambda})| < \dfrac{\epsilon}{b-a}$, para todo $s \in [a, b]$. O caso geral segue da aplicação do argumento acima para cada parte de $g$ que é contínua. □

# Referências


[1] Djairo Guedes de Figueiredo. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[2] Donald Kreider, Donald R. Ostberg, Robert C. Kuller, and Fred W. Perkins. *Introdução à Análise Linear*. Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1972.

[3] Erwin Kreiszig. *Matemática Superior*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2a. edition, 1985.