Transformada de Fourier

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

5 de abril de 2017

Sumário

1 Definição e Propriedades

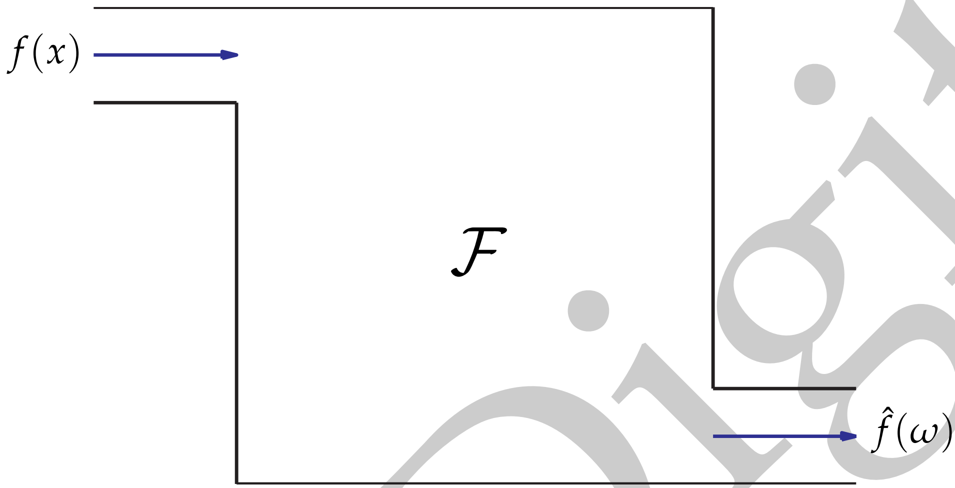

Figura 1: Transformada de Fourier como uma "caixa"

A **transformada de Fourier** de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) é definida por

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx.$$

para todo $\omega \in \mathbb{R}$ tal que a integral acima converge. Representaremos a função original por uma letra minúscula e a sua variável por x. Enquanto a transformada de Fourier será representada pela letra correspondente com um chapéu e a sua variável por ω. Por exemplo, as transformadas de Fourier das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ serão representadas por $\hat{f}(\omega)$, $\hat{g}(\omega)$ e $\hat{h}(\omega)$, respectivamente.

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x) f(x) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(\omega x) f(x) dx \right),$$

e $\hat{f}(\omega)$ é real se, e somente se, f é par. Neste caso também $\hat{f}$ é par.

Vários autores definem a transformada de Fourier de maneiras diferentes, mas que são casos particulares da fórmula

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1-a}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ib\omega x} dx,$$

para diferentes valores das constantes a e b. Estamos usando aqui $(a, b) = (0, -1)$. Algumas definições também bastante usadas são com $(a, b) = (0, -2\pi)$ e $(a, b) = (1, -1)$.

Seja I um subconjunto dos números reais. A função $\chi_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chamada de **função característica de** I é definida por

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in I, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 1. Seja a um número real positivo. Seja $\chi_{[0,a]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\chi_{[0,a]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x < a, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\chi_{[0,a]})(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-i\omega x} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\Big|_0^a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - e^{-ia\omega}}{i\omega}, \text{ se } \omega \neq 0, \\ \mathcal{F}(\chi_{[0,a]})(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Exemplo 2. Seja a um número real positivo. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = e^{-ax} u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ e^{-ax}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-i\omega x} e^{-ax} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(a+i\omega)x}}{-(a+i\omega)}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + i\omega}. \end{aligned}$$

Teorema 1 (Dilatação)**.** *Seja a uma constante não nula. Se a transformada de Fourier da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $\hat{f}(\omega)$, então a transformada de Fourier da função*

$$g(x) = f(ax)$$

é

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad \text{para } \omega \in \mathbb{R}.$$

Em particular $\mathcal{F}(f(-x)) = \hat{f}(-\omega)$.

Demonstração. Se $a > 0$, então

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(ax) dx \\ &= \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \frac{x'}{a}} f(x') dx' = \frac{1}{a} \hat{f}(\frac{\omega}{a}). \end{aligned}$$

Se $a < 0$, então

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(ax) dx \\ &= \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} e^{-i\omega \frac{x'}{a}} f(x') dx' = -\frac{1}{a} \hat{f}(\frac{\omega}{a}). \end{aligned}$$

□

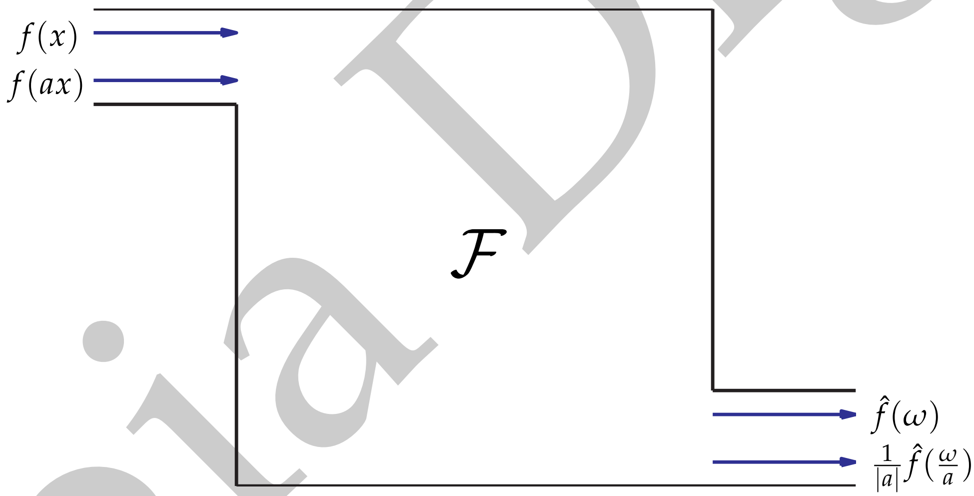

Figura 2: Teorema da Dilatação

Exemplo 3. Seja a um número real positivo. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = e^{ax} u_0(-x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Como $f(x) = g(-x)$, em que $g(x) = e^{-ax} u_0(x)$, então pelo Exemplo 2 temos que

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \mathcal{F}(g)(-\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a - i\omega}$$

Exemplo 4. Seja a um número real positivo. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \chi_{[-a,0]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } -a < x < 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como $\chi_{[-a,0]}(x) = \chi_{[0,a]}(-x)$, então pelo Exemplo 1 temos que

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(\chi_{[-a,0]})(\omega) = \mathcal{F}(\chi_{[0,a]})(-\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ia\omega}-1}{i\omega}, & \text{se } \omega \neq 0, \\ \frac{a}{\sqrt{2\pi}}, & \text{se } \omega = 0. \end{cases}$$

Observe que

$$\lim_{\omega \to 0} \hat{f}(\omega) = \hat{f}(0),$$

ou seja, $\hat{f}(\omega)$ é contínua. Isto vale em geral.

Teorema 2 (Continuidade). *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$, então $\hat{f}(\omega)$ é contínua.*

Teorema 3 (Linearidade). *Se a transformada de Fourier de $f(x)$ é $\hat{f}(\omega)$, e a transformada de Fourier de $g(x)$ é $\hat{g}(\omega)$, então para quaisquer constantes α e β*

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g)(\omega) = \alpha \mathcal{F}(f)(\omega) + \beta \mathcal{F}(g)(\omega) = \alpha \hat{f}(\omega) + \beta \hat{g}(\omega), \quad \text{para } \omega \in \mathbb{R}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\alpha f + \beta g)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}(\alpha f(x) + \beta g(x))dx \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)dx + \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} g(x)dx \\ &= \alpha \mathcal{F}(f)(\omega) + \beta \mathcal{F}(g)(\omega) \end{aligned}$$

$\square$

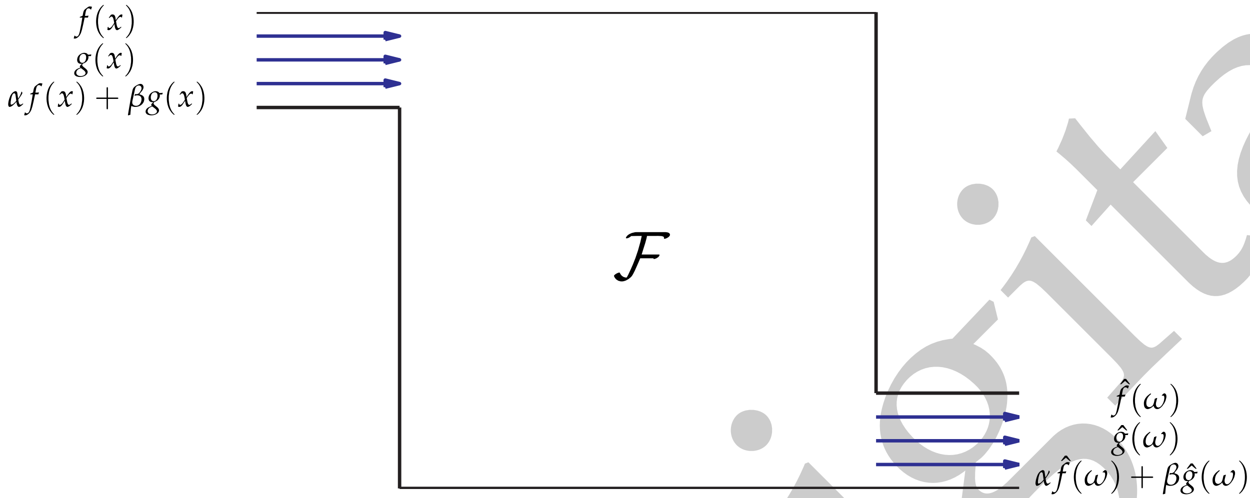

Figura 3: Transformada de Fourier de uma combinação linear

Exemplo 5. Seja a um número real positivo. Seja $\chi_{[-a,a]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\chi_{[-a,a]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } -a < x < a \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como $\chi_{[-a,a]}(x) = \chi_{[-a,0]}(x) + \chi_{[0,a]}(x)$, então pelos Exemplos 1 e 4 temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\chi_{[-a,a]})(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{ia\omega} - 1}{i\omega} + \frac{1 - e^{-ia\omega}}{i\omega} \right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{sen}(a\omega)}{\omega}, \text{ se } \omega \neq 0 \\ \mathcal{F}(\chi_{[-a,a]})(0) &= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Exemplo 6. Seja a um número real positivo. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = e^{-a|x|}.$$

Como $f(x) = e^{ax} u_0(-x) + e^{-ax} u_0(x)$, então pelos Exemplos 2 e 3 temos que

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a - i\omega} + \frac{1}{a + i\omega} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{\omega^2 + a^2}.$$

Teorema 4 (Derivadas da Transformada de Fourier). *Seja $\hat{f}(\omega)$ a transformada de Fourier de $f(x)$.*

(a) *Se $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$ e $\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|dx < \infty$, então*

$$\mathcal{F}(xf(x))(\omega) = i\frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega).$$

(b) *Se também $\int_{-\infty}^{\infty} |x^2 f(x)|dx < \infty$, então*

$$\mathcal{F}(x^2 f(x))(\omega) = -\frac{d^2\hat{f}}{d\omega^2}(\omega).$$

Demonstração. Pode ser demonstrado que sob as hipóteses acima a derivada pode ser calculada sob o sinal de integração.

(a)

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\omega}\left(e^{-i\omega x} f(x)\right) dx \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} x f(x) dx \\ &= -i\mathcal{F}(xf(x))(\omega). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{d^2\hat{f}}{d\omega^2}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2}{d\omega^2}\left(e^{-i\omega x} f(x)\right) dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} x^2 f(x) dx \\ &= -\mathcal{F}(x^2 f(x))(\omega). \end{aligned}$$

$\square$

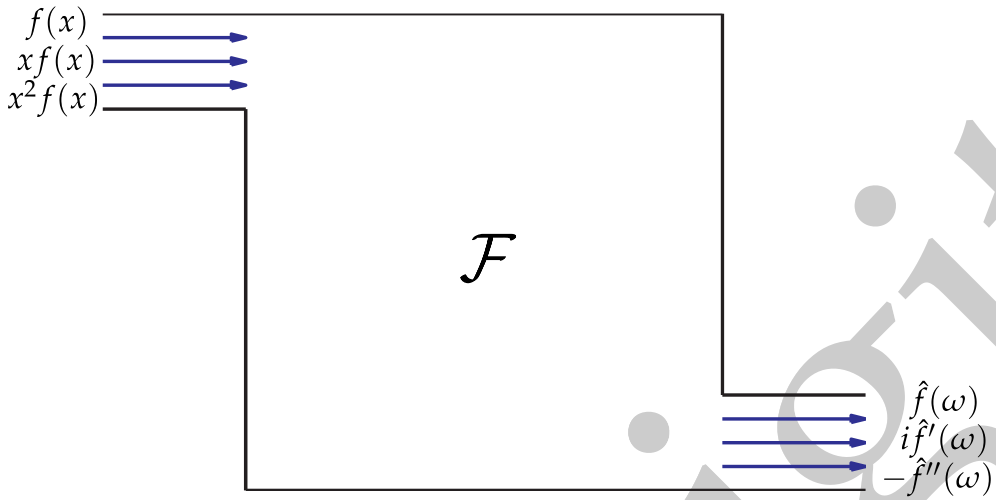

Figura 4: Derivadas da Transformada de Fourier

Exemplo 7. Seja a um número real positivo. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } -a < x < a \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Observamos que

$$\begin{aligned} f(x) &= |x|\chi_{[-a,a]}(x) = -x\chi_{[-a,0]}(x) + x\chi_{[0,a]}(x) \\ &= -x\chi_{[0,a]}(-x) + x\chi_{[0,a]}(x). \end{aligned}$$

Como para $\omega \neq 0$ temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x\chi_{[0,a]}(x))(\omega) &= i\frac{d}{d\omega}\widehat{\chi_{[0,a]}}(\omega) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1-e^{-ia\omega}}{i\omega}\right) \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{-a\,\omega e^{-ia\omega} - i(1-e^{-ia\omega})}{(i\omega)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i\,a\,\omega e^{-ia\omega} + e^{-ia\omega} - 1}{\omega^2} \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{F}(-x\chi_{[0,a]}(-x))(\omega) = \mathcal{F}(x\chi_{[0,a]}(x))(-\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{-i\,a\,\omega e^{ia\omega} + e^{ia\omega} - 1}{\omega^2},$$

então temos que

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \mathcal{F}(-x\chi_{[0,a]}(-x))(\omega) + \mathcal{F}(x\chi_{[0,a]}(x))(\omega) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{i\,a\,\omega e^{-i\,a\,\omega} + e^{-i\,a\,\omega} - 1}{\omega^2} + \frac{-i\,a\,\omega e^{i\,a\,\omega} + e^{i\,a\,\omega} - 1}{\omega^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2\,a\,\omega\,\mathrm{sen}\,(a\,\omega) + 2\cos(a\,\omega) - 2}{\omega^2}, \quad \text{para } \omega \neq 0 \\
\hat{f}(0) &= \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}}.
\end{aligned}$$

Teorema 5 (Transformada de Fourier das Derivadas)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua com transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$.*

(a) *Se $f'(x)$ é seccionalmente contínua e $\lim_{x\to\pm\infty} |f(x)| = 0$, então*

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega).$$

(b) *Se $f'(x)$ é contínua, $f''(x)$ é seccionalmente contínua e $\lim_{x\to\pm\infty} |f'(x)| = 0$, então*

$$\mathcal{F}(f'')(\omega) = -\omega^2\hat{f}(\omega).$$

Demonstração. (a) Vamos provar para o caso em que $f'(x)$ é contínua.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f')(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f'(x)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega x} f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - (-i\omega)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)dx \\
&= i\omega\hat{f}(\omega),
\end{aligned}$$

pois $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-i\omega x} f(x) = 0$.

(b) Vamos provar para o caso em que $f''(x)$ é contínua. Usando o item anterior:

$$\mathcal{F}(f'')(\omega) = i\omega\mathcal{F}(f')(\omega) = (i\omega)^2\hat{f}(\omega) = \omega^2\hat{f}(\omega).$$

□

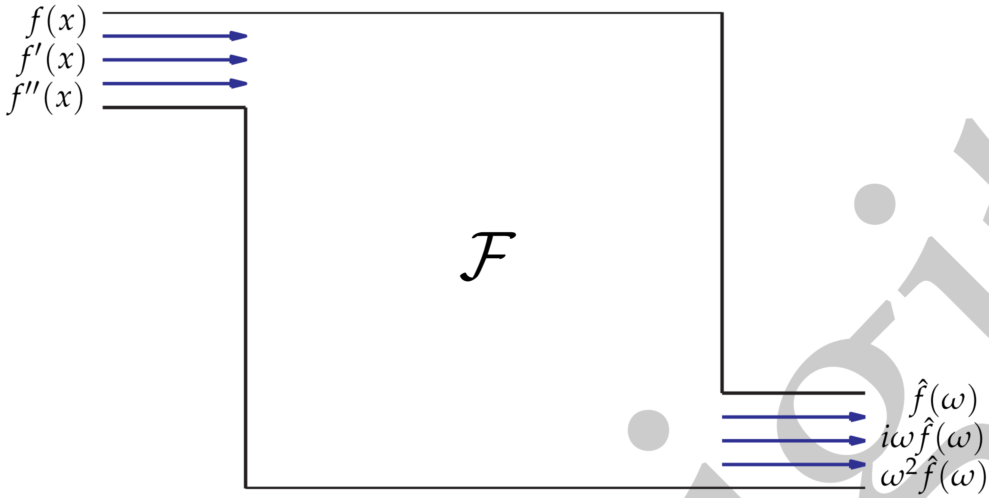

Figura 5: Transformada de Fourier das Derivadas

Corolário 6 (Transformada de Fourier da Integral)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua com transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$. Se $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ é tal que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |g(x)| = 0$, então*

$$\mathcal{F}(g)(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{i\omega}, \text{ para } \omega \neq 0.$$

Demonstração. Pelo Teorema 5 temos que

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(g')(\omega) = i\omega\hat{g}(\omega).$$

De onde segue o resultado. □

Exemplo 8. Seja $f(x) = e^{-ax^2}$. Derivando obtemos

$$f'(x) = -2axf(x).$$

Aplicando-se a transformada de Fourier a ambos os membros obtemos

$$i\omega\hat{f}(\omega) = -2ai\hat{f}'(\omega).$$

Resolvendo esta equação diferencial obtemos

$$\hat{f}(\omega) = \hat{f}(0)e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

Mas,

$$\begin{aligned}\hat{f}(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)}dxdy\right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-ar^2}rdrd\theta\right)^{1/2} = -\frac{1}{\sqrt{2a}\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{2\pi} e^{-ar^2}\Big|_0^{\infty} d\theta\right)^{1/2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a}}.\end{aligned}$$

Logo

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

Em particular

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{x^2}{2}})(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

Teorema 7 (Translação)**.** *Seja a uma constante. Se a transformada de Fourier da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $\hat{f}(\omega)$, então*

(a) $\mathcal{F}(f(x-a))(\omega) = e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$, *para* $\omega \in \mathbb{R}$. *e*

(b) $\mathcal{F}(e^{iax}f(x))(\omega) = \hat{f}(\omega - a)$.

Demonstração. (a)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(x-a))(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}f(x-a)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x'+a)}f(x')dx' = e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega).\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(e^{iax}f(x))(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}e^{iax}f(x)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-a)x}f(x)dx = \hat{f}(\omega - a).\end{aligned}$$

□

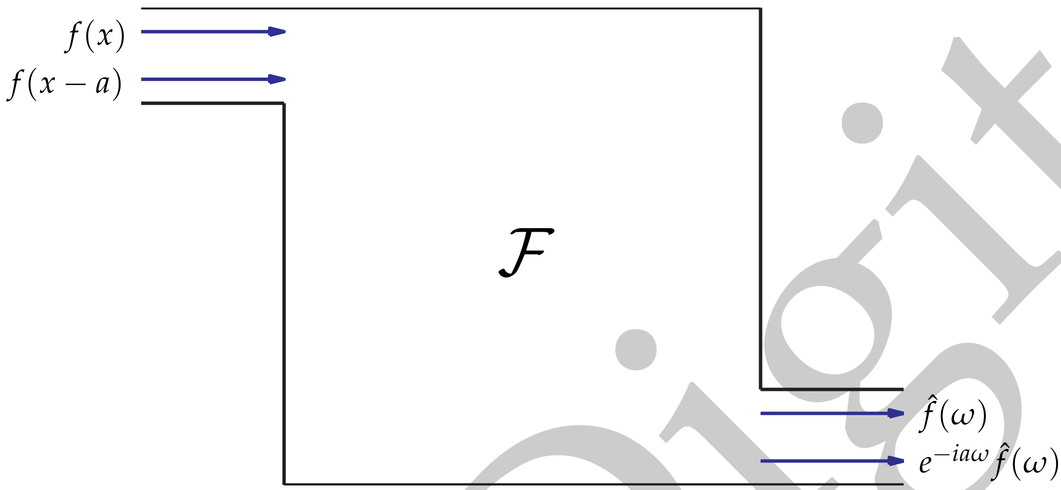

Figura 6: Teorema da Translação (a)

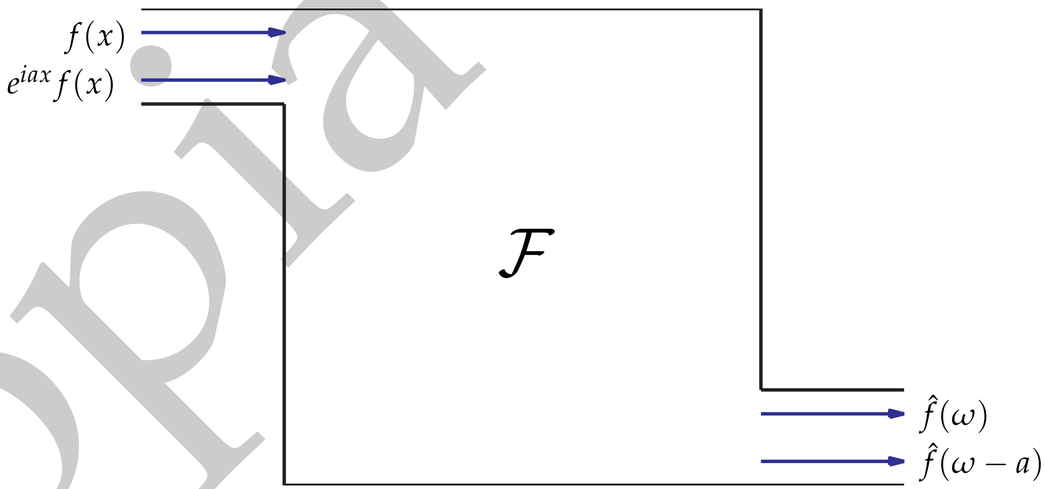

Figura 7: Teorema da Translação (b)

Exemplo 9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \cos ax & \text{se } -b < x < b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como

$$f(x) = (\cos ax)\chi_{[-b,b]}(x) = \left(\frac{e^{iax} + e^{-iax}}{2}\right)\chi_{[-b,b]}(x),$$

e pela linearidade da transformada de Fourier e pelo Teorema da Dilatação (Teorema 1 na página 4), para $\omega \neq 0$ temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\chi_{[-b,b]})(\omega) &= \mathcal{F}\left(\chi_{[0,b]}(-x) + \chi_{[0,b]}(x)\right)(\omega) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{ib\omega} - 1}{i\omega} + \frac{1 - e^{-ib\omega}}{i\omega}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\operatorname{sen}(b\omega)}{\omega}, \text{ para } \omega \neq 0, \\ \mathcal{F}(\chi_{[-b,b]})(0) &= \frac{2b}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

então, pelo Teorema da Translação (Teorema 7 (b) na página 12) e pela linearidade da transformada de Fourier, temos que

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}(\chi_{[-b,b]})(\omega - a) + \mathcal{F}(\chi_{[-b,b]})(\omega + a)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\operatorname{sen} b(\omega - a)}{\omega - a} + \frac{\operatorname{sen} b(\omega + a)}{\omega + a}\right), \quad \text{para } \omega \neq \pm a \\ \hat{f}(-a) &= \hat{f}(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(2b + \frac{\operatorname{sen} 2ab}{2a}\right). \end{aligned}$$

Exercícios (respostas na página 35)

1.1. Determine a transformada de Fourier das seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(a) $f(x) = (1 - |x|/a)\chi_{[-a,a]}(x) = \begin{cases} 1 - |x|/a, & \text{se } -a < x < a, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

(b) $f(x) = \operatorname{sen}(ax)\chi_{[-b,b]}(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(ax), & \text{se } -b < x < b \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

(c) $f(x) = xe^{-x^2}$.

(d) $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

(e) $f(x) = e^{-(a+ib)x}u_0(x) = \begin{cases} e^{-(a+ib)x}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$ para $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

(f) $f(x) = e^{(a+ib)x}u_0(-x) = \begin{cases} e^{(a+ib)x}, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$ para $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

2 Inversão

Teorema 8. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua e tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$, então*

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0.$$

Demonstração. Pelo Lema de Riemann-Lesbegue, temos que

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \int_{-M}^{M} e^{-i\omega x} f(x)dx = \lim_{\omega \to \pm\infty} \int_{-M}^{M} f(x) \cos \omega x dx + i \lim_{\omega \to \pm\infty} \int_{-M}^{M} f(x) \operatorname{sen} \omega x dx = 0.$$

Para todo $\epsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que $\int_{|x|>M} |f(x)|dx < \epsilon$. Logo

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \lim_{\omega \to \pm\infty} |\hat{f}(\omega)| &= \lim_{\omega \to \pm\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)dx \right| \\ &\leq \lim_{\omega \to \pm\infty} \left| \int_{-M}^{M} e^{-i\omega x} f(x)dx \right| + \int_{|x|>M} |f(x)|dx \leq \epsilon. \end{aligned}$$

□

Lema 9. *Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx < \infty$, $g(0) = 0$ e $g'(0)$ existe, então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega)d\omega = 0.$$

Demonstração. Seja

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ g'(0), & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Então $g(x) = xh(x)$ e $\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|dx < \infty$. Logo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega)d\omega = i \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}'(\omega)d\omega = i\hat{h}(\omega)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

pelo Teorema 8. □

Teorema 10. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$, então*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega} \hat{f}(\omega) d\omega,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ em que f é contínua.

Demonstração. Vamos demonstrar para o caso em que $f'(x)$ existe. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x') = f(x + x') - f(x) e^{-\frac{x'^2}{2}}.$$

Como $g(0) = 0$, pelo Lema 9 temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega} \hat{f}(\omega) d\omega - f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega} \hat{f}(\omega) d\omega - f(x)\sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

$\square$

Corolário 11. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$, então*

$$\mathcal{F}(\hat{f})(\omega) = f(-\omega).$$

Demonstração. Pelo Teorema 10 temos que

$$f(-\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega'\omega} \hat{f}(\omega') d\omega' = \mathcal{F}(\hat{f})(\omega)$$

$\square$

Exemplo 10. Seja a um número real positivo. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$$

Como $\mathcal{F}(e^{-a|x|})(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{2a}{\omega^2 + a^2}$, então

$$f(\omega) = \hat{g}(\omega), \quad \text{em que } g(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} e^{-a|x|}.$$

Logo

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \mathcal{F}(\hat{g})(\omega) = g(-\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} e^{-a|\omega|}.$$

Corolário 12 (Injetividade)**.** *Dadas duas funções $f(x)$ e $g(x)$ seccionalmente contínuas tais que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ e $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty$, se*

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \mathcal{F}(g)(\omega), \text{ para todo } \omega \in \mathbb{R},$$

então $f(x) = g(x)$, exceto possivelmente nos pontos de descontinuidade.

Demonstração. Pela linearidade da transformada de Fourier, basta provarmos que se $\mathcal{F}(f)(\omega) = 0$, então $f(x) = 0$ nos pontos em que f é contínua. Mas isto é decorrência imediata do Teorema 10. □

Exemplo 11. Vamos determinar a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja transformada de Fourier é $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{a + ib + i\omega}$, para $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{a + ib + i\omega} = \frac{1}{a + i(b + \omega)}$$

$$f(x) = e^{-ibx} \sqrt{2\pi} e^{-ax} u_0(x) = \sqrt{2\pi} e^{-(a+ib)x} u_0(x).$$

Exercícios (respostas na página 36)

2.1. Determine as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ cujas transformadas de Fourier são dadas

(a) $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{(2 + i\omega)(3 + i\omega)}$.

(b) $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{(1 + i\omega)^2}$.

(c) $\hat{f}(\omega) = \dfrac{i\omega}{1 + \omega^2}$.

(d) $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{\omega^2 + \omega + 1}$.

(e) $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{a + ib - i\omega}$, para $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

(f) $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{4 - \omega^2 + 2i\omega}$.

Calcule a transformada de Fourier das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

(b) $f(x) = \dfrac{x}{(1 + x^2)^2}$.

3 Convolução

A convolução de duas funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ seccionalmente contínuas, limitadas e tais que $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$ e $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dx<\infty$, é definida por

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g(x-y)dy,\quad \text{para } x\in\mathbb{R}.$$

Exemplo 12. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\chi_{[0,1]}(x)=\begin{cases}1, & \text{se } 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$

$$\begin{aligned}(f*f)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\chi_{[0,1]}(y)\chi_{[0,1]}(x-y)dy=\int_0^1\chi_{[0,1]}(x-y)dy\\ &= \int_0^1\chi_{[-1,0]}(y-x)dy=\int_0^1\chi_{[-1+x,x]}(y)dy=\begin{cases}0, & \text{se } x<0,\\ x, & \text{se } 0\le x<1,\\ 2-x, & \text{se } 1\le x<2,\\ 0, & \text{se } x\ge 2.\end{cases}\end{aligned}$$

Teorema 13 (Convolução)**.** *Sejam $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ seccionalmente contínuas, limitadas e tais que $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$ e $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dx<\infty$. Então*

$$\mathcal{F}(f*g)(\omega)=\sqrt{2\pi}\,\hat{f}(\omega).\hat{g}(\omega)$$

Demonstração. Pelas definições temos que

$$\mathcal{F}(f*g)(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g(x-y)dy\right]dx.$$

Sob as hipóteses consideradas pode-se mostrar que podemos trocar a ordem de integração para obtermos

$$\mathcal{F}(f*g)(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}g(x-y)dx\right]dy.$$

Fazendo-se a mudança de variáveis $x - y = z$ obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f*g)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(z+y)} g(z) dz \right] dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega y} f(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega z} g(z) dz \right] dy \\
&= \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(\omega).\hat{g}(\omega).
\end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 13. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ x, & \text{se } 0 \le x < 1, \\ 2 - x, & \text{se } 1 \le x < 2, \\ 0, & \text{se } x \ge 2. \end{cases}$$

Como, pelo Exemplo 12, $f = \chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}$, então

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi}\, (\widehat{\chi_{[0,1]}}(\omega))^2 = \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - e^{-ia\omega}}{i\omega} \right)^2 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1 - e^{-ia\omega})^2}{\omega^2}.$$

Teorema 14. *A convolução satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $f * g = g * f$

(b) $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$

(c) $(f * g) * h = f * (g * h)$

(d) $f * 0 = 0 * f = 0$

Demonstração.

(a)

$$\begin{aligned}
(f*g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy = \int_{\infty}^{-\infty} f(x-y') g(y') (-dy') = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y') g(y') dy' = (g*f)(x).
\end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
(f*(g_1+g_2))(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)(g_1(x-y)+g_2(x-y))dy = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g_1(x-y)dy + \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g_2(x-y)dy = \\
&= (f*g_1)(x)+(f*g_2)(x).
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
((f*g)*h)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(x-y)h(y)dy = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y')g(x-y-y')dy'\right] h(y)dy = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y')g(x-y-y')h(y)dydy' = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y')\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x-y-y')h(y)dy\right] dy' = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y')(g*h)(x-y')dy' = (f*(g*h))(x).
\end{aligned}
$$

(d) $(f*0)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y-x)\cdot 0\, dy = 0 = (0*f)(x)$.

$\square$

Exercícios (respostas na página 38)

3.1. Calcule a convolução $f * g$ para $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

(a) $f(x) = e^{-x}u_0(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$,

$g(x) = e^{-2x}u_0(x) = \begin{cases} e^{-2x}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$.

(b) $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$,

$g(x) = e^{-x}u_0(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$.

3.2. Determine, usando convolução, as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ cujas transformadas de Fourier são dadas

(a) $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{(2 + i\omega)(3 + i\omega)}$.

(b) $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{(1 + i\omega)^2}$.

(c) $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{4 - \omega^2 + 2i\omega}$.

3.3. Resolva a equação

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{(x-y)^2 + 4} dy = \frac{1}{x^2 + 9}$$

4 Aplicações às Equações Diferenciais Parciais

4.1 Equação do Calor em uma barra infinita

Vamos determinar a temperatura em função da posição e do tempo, $u(x,t)$ em uma barra infinita, sendo conhecida a distribuição de temperatura inicial, $f(x)$, ou seja, vamos resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Vamos supor que existam a transformada de Fourier da solução $u(x,t)$ em relação a variável x e de suas derivadas $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Além disso vamos supor que $\lim_{x\to\pm\infty} |u(x,t)| = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} \left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right| = 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$. Então aplicando-se a transformada de Fourier em relação a variável x na equação diferencial obtemos

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,t) = -\alpha^2\omega^2\hat{u}(\omega,t).$$

Resolvendo esta equação diferencial obtemos que

$$\hat{u}(\omega,t) = c(\omega)e^{-\alpha^2\omega^2 t}.$$

Vamos supor que exista $\hat{f}(\omega)$. Neste caso, usando o fato de que $\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega)$ obtemos que

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)e^{-\alpha^2\omega^2 t}.$$

Seja $\hat{k}(\omega,t) = e^{-\alpha^2\omega^2 t}$. Então

$$k(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}}$$

e pelo Teorema da Convolução (Teorema 13 na página 20) temos que

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f * k)(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha^2 t}} dy. \tag{1}$$

Pode-se provar que se f é seccionalmente contínua e limitada, então a expressão dada por (1) define uma função que satisfaz a equação do calor e

$$\lim_{t\to 0+} u(x,t) = f(x),$$

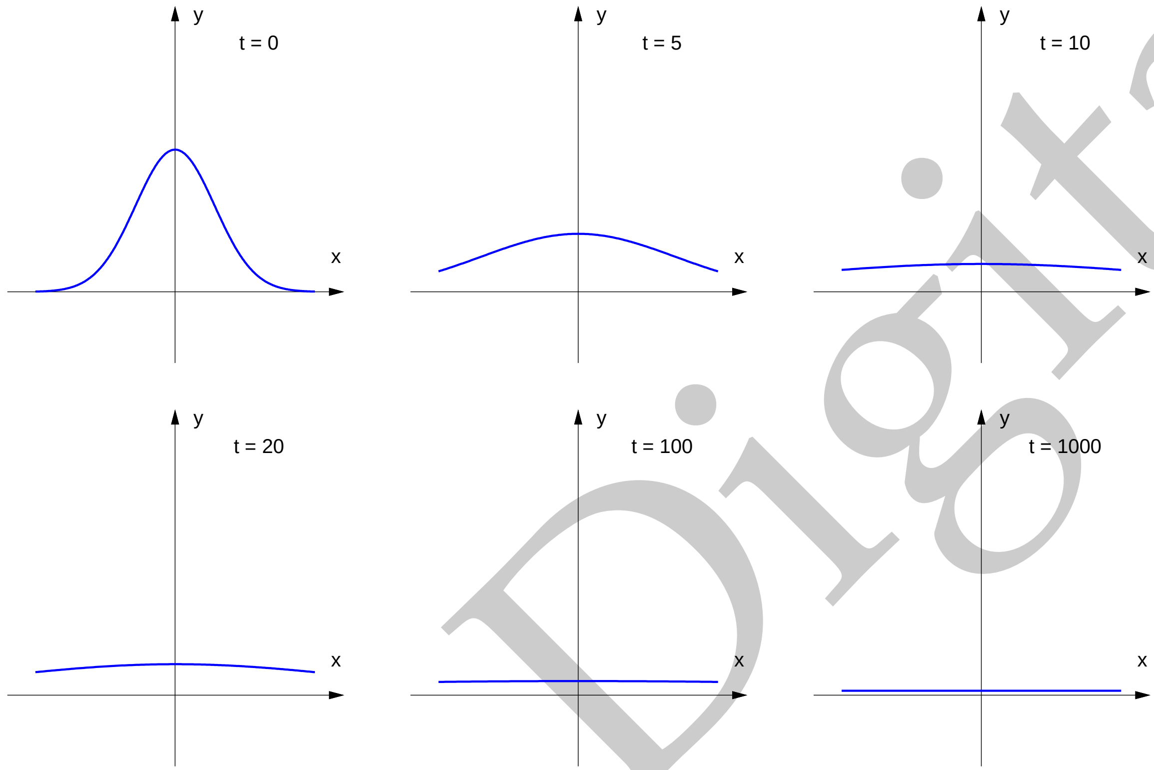

Figura 8: Solução da equação do calor, $u(x,t)$, do Exemplo 14

nos pontos em que f é contínua.

Exemplo 14. Vamos resolver, usando a transformada de Fourier, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = e^{-\frac{x^2}{4}}, \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Seja $f(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}$. Então $\hat{f}(\omega) = \sqrt{2}e^{-\omega^2}$ e

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)e^{-\omega^2 t} = \sqrt{2}e^{-\omega^2(1+t)}.$$

Logo a solução do problema de valor inicial é

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} e^{-\frac{x^2}{4(1+t)}}.$$

4.2 Equação da Onda em uma Dimensão

Vamos resolver a equação diferencial da onda em uma dimensão usando a transformada de Fourier

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vamos supor que existam a transformada de Fourier da solução $u(x,t)$ em relação a variável x e de suas derivadas $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Além disso vamos supor que $\lim_{x\to\pm\infty} |u(x,t)| = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| = 0$. Aplicando-se a transformada de Fourier em relação a variável x na equação diferencial obtemos

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(\omega,t) = -a^2\omega^2\hat{u}(\omega,t).$$

Resolvendo esta equação diferencial obtemos que

$$\hat{u}(\omega,t) = \begin{cases} \hat{\phi}_1(\omega)e^{-ia\omega t} + \hat{\psi}_1(\omega)e^{+ia\omega t}, & \text{se } \omega > 0, \\ c_1 + c_2 t, & \text{se } \omega = 0, \\ \hat{\phi}_2(\omega)e^{-ia\omega t} + \hat{\psi}_2(\omega)e^{+ia\omega t}, & \text{se } \omega < 0. \end{cases}$$

Definindo

$$\hat{\phi}(\omega) = \begin{cases} \hat{\phi}_1(\omega), & \text{se } \omega > 0, \\ \hat{\phi}_2(\omega), & \text{se } \omega < 0, \end{cases} \qquad \hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} \hat{\psi}_1(\omega), & \text{se } \omega > 0, \\ \hat{\psi}_2(\omega), & \text{se } \omega < 0, \end{cases}$$

temos que

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{\phi}(\omega)e^{-ia\omega t} + \hat{\psi}(\omega)e^{+ia\omega t}. \tag{2}$$

e pelo Teorema da Translação (Teorema 7 na página 12) temos que

$$u(x,t) = \phi(x-at) + \psi(x+at),$$

que é a solução de D'Alembert para a equação corda elástica.

Vamos resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \\ u(x,0) = f(x), \; \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \; x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Além do que já supomos anteriormente vamos supor também que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sejam seccionalmente contínuas, limitadas e tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty.$$

Aplicando-se a transformada de Fourier nas condições iniciais em relação a variável x obtemos

$$\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega), \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega, 0) = \hat{g}(\omega).$$

Substituindo-se $t = 0$ em (2) obtemos

$$\hat{f}(\omega) = \hat{u}(\omega, 0) = \hat{\phi}(\omega) + \hat{\psi}(\omega).$$

Derivando-se (2) em relação a t e substituindo-se $t = 0$ obtemos

$$\hat{g}(\omega) = ia\omega(-\hat{\phi}(\omega) + \hat{\psi}(\omega)).$$

Logo

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(\omega) + \frac{\hat{g}(\omega)}{ia\omega}\right),$$
$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(\omega) - \frac{\hat{g}(\omega)}{ia\omega}\right).$$

Substituindo-se em (2) obtemos

$$\hat{u}(\omega, t) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(\omega) - \frac{\hat{g}(\omega)}{ia\omega}\right) e^{-ia\omega t} + \frac{1}{2}\left(\hat{f}(\omega) - \frac{\hat{g}(\omega)}{ia\omega}\right) e^{+ia\omega t}.$$

Aplicando-se a transformada de Fourier inversa obtemos

$$u(x,t) \;\; = \;\; \frac{1}{2}\left(f(x - at) + f(x + at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(y) dy.$$

que é a **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial.

4.3 Problema de Dirichlet no Semi-plano

Vamos considerar o problema de Dirichlet no semi-plano

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \; x \in \mathbb{R}, \; y > 0 \\ u(x,0) = f(x), \; x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Vamos supor que existam a transformada de Fourier da solução $u(x,y)$ em relação a variável x e de suas derivadas $\dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ e $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$. Além disso vamos supor que $\lim_{x\to\pm\infty} |u(x,y)| = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} \left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right| = 0$. Então aplicando-se a transformada de Fourier em relação a variável x na equação diferencial obtemos

$$-\omega^2 \hat{u}(\omega,y) + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\omega,y) = 0.$$

Resolvendo esta equação diferencial obtemos que

$$\hat{u}(\omega,y) = c_1(\omega)e^{-|\omega|y} + c_2(\omega)e^{|\omega|y}.$$

Como $\lim_{\omega\to\pm\infty} \hat{u}(\omega,y) = 0$, então $c_2(\omega) = 0$. Vamos supor que exista $\hat{f}(\omega)$. Neste caso, usando o fato de que $\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega)$ obtemos que

$$\hat{u}(\omega,y) = \hat{f}(\omega)e^{-|\omega|y}.$$

Seja $\hat{k}(\omega,y) = e^{-|\omega|y}$. Então

$$k(x,y) = \frac{2y}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x^2+y^2}$$

e pelo Teorema da Convolução (Teorema 13 na página 20) temos que

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f * k)(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2+y^2}dt. \tag{3}$$

Pode-se provar que se f é contínua e limitada, então a expressão dada por (3) define uma função que satisfaz a equação de Laplace e

$$\lim_{y\to 0+} u(x,y) = f(x).$$

Exercícios (respostas na página 40)

4.1. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} = g(x) \\ u(x,0) = f(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

4.2. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma u \\ u(x,0) = f(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aqui γ é uma constante positiva.

4.3. Resolva o problema do calor em uma barra infinita com convecção (existe troca de calor da barra com o ambiente)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ u(x,0) = f(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aqui k é uma constante.

4.4. Determine a temperatura como função da posição e do tempo de uma barra infinita com uma fonte externa de calor, ou seja, resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x) \\ u(x,0) = f(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

4.5. Resolva a equação diferencial a seguir usando a transformada de Fourier

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 u, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aqui α é uma constante positiva.

5 Tabela de Transformadas de Fourier

Transformadas de Fourier Elementares	
$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x)$	$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega)$
$\chi_{[0,a]}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < a \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - e^{-ia\omega}}{i\omega}$
$e^{-ax}u_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0 \\ e^{-ax}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + i\omega}, a > 0$
$\frac{1}{x^2 + a^2}$, para $a > 0$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{2a} e^{-a\|\omega\|}$
e^{-ax^2}, para $a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$f(ax)$, para $a \neq 0$	$\frac{1}{\|a\|} \hat{f}(\frac{\omega}{a})$
$xf(x)$	$i\frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega)$
$f'(x)$	$i\omega\hat{f}(\omega)$
$\int_0^x f(y)dy$	$\frac{\hat{f}(\omega)}{i\omega}$
$f(x-a)$	$e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$
$e^{iax}f(x)$	$\hat{f}(\omega - a)$
$\hat{f}(x)$	$f(-\omega)$
$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$	$\sqrt{2\pi}\ \hat{f}(\omega).\hat{g}(\omega)$

6 Relação com a Série de Fourier e a Transformada de Fourier Discreta

Usando fórmula de Euler podemos escrever a série de Fourier de uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ seccionalmente contínua com derivada também seccionalmente contínua como

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(e^{\frac{in\pi x}{L}} + e^{-\frac{in\pi x}{L}}\right) + \frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(e^{\frac{in\pi x}{L}} - e^{-\frac{in\pi x}{L}}\right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{\frac{in\pi x}{L}} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) e^{-\frac{in\pi x}{L}} \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{\frac{in\pi x}{L}} + \frac{1}{2}\sum_{n=-1}^{-\infty} (a_{-n} + ib_{-n}) e^{\frac{in\pi x}{L}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}}, \end{aligned}$$

em que

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx, \quad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

pois

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L} dx \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} dx, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) = 0$, para $|x| > L$. Então

$$\hat{f}\left(\frac{n\pi}{L}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx = \frac{2L}{\sqrt{2\pi}} c_n \quad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

A **transformada de Fourier discreta (DFT)** de um vetor $Y \in \mathbb{C}^n$ é definida por

$$X = F_N Y,$$

em que

$$F_N = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-i2\pi\frac{1}{N}} & e^{-i2\pi\frac{2}{N}} & \dots & e^{-i2\pi\frac{N-1}{N}} \\ 1 & e^{-i2\pi\frac{2}{N}} & e^{-i4\pi\frac{4}{N}} & \dots & e^{-i2\pi\frac{2(N-1)}{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & e^{-i2\pi\frac{N-1}{N}} & e^{-i2\pi\frac{2(N-1)}{N}} & \dots & e^{-i2\pi\frac{(N-1)(N-1)}{N}} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) = 0$, para $|x| > L$. Então

$$\hat{f}\left(\frac{n\pi}{L}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\pi\frac{nx}{L}}\,dx, \quad \text{para } n = 0, \pm 1, \dots, \frac{N}{2}.$$

Podemos, agora, aproximar a integral por uma soma de Riemann dividindo o intervalo $[0, 2L]$ em N subintervalos de comprimento $2L/N$, ou seja,

$$\begin{aligned}\hat{f}\left(\frac{n\pi}{L}\right) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} f\left(\frac{2kL}{N}\right)e^{-i2\pi\frac{kn}{N}}\ \frac{2L}{N} = \\ &= \frac{2L}{N\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} f\left(\frac{2kL}{N}\right)e^{-i2\pi\frac{kn}{N}} = \\ &= \frac{2L}{N\sqrt{2\pi}}\left(\sum_{k=0}^{N/2-1} f\left(\frac{2kL}{N}\right)e^{-i2\pi\frac{kn}{N}} + \sum_{k=N/2}^{N-1} f\left(\frac{2kL}{N} - 2L\right)e^{-i2\pi\frac{kn}{N}}\right),\end{aligned}$$

para $n = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$.

$$\begin{aligned}\hat{f}\left(\frac{(-N+n)\pi}{L}\right) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} f\left(\frac{2kL}{N}\right)e^{-i2\pi\frac{kn}{N}}\ \frac{2L}{N} = \\ &= \frac{2L}{N\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} f\left(\frac{2kL}{N}\right)e^{-i2\pi\frac{kn}{N}} = \\ &= \frac{2L}{N\sqrt{2\pi}}\left(\sum_{k=0}^{N/2-1} f\left(\frac{2kL}{N}\right)e^{-i2\pi\frac{kn}{N}} + \sum_{k=N/2}^{N-1} f\left(\frac{2kL}{N} - 2L\right)e^{-i2\pi\frac{kn}{N}}\right),\end{aligned}$$

para $n = \frac{N}{2}, \dots, N - 1$.

Assim, definindo

$$X = \left[f(0)\, f\left(\frac{2L}{N}\right)\ \ldots\ f\left(L - \frac{2L}{N}\right)\, f(-L)\, f\left(-L + \frac{2L}{N}\right)\ \ldots\ f\left(-\frac{2L}{N}\right)\right]^t,$$

então

$$Y = F_N X \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left[\hat{f}(0)\, \hat{f}\left(\frac{\pi}{L}\right)\ \cdots\ \hat{f}\left(\left(\frac{N}{2}-1\right)\frac{\pi}{L}\right)\, \hat{f}\left(-\frac{N}{2}\frac{\pi}{L}\right)\ \cdots\ \hat{f}\left(-\frac{\pi}{L}\right)\right]^t.$$

Calcular a transformada de Fourier discreta multiplicando-se pela matriz F_n tem um custo computacional de N^2 produtos. Este produto pode ser calculado ao custo de $N \log N$ produtos usando um algoritmo chamado **Transformada de Fourier Rápida (FFT)**.

Exemplo 15. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

então temos que

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\,a\,\omega\,\mathrm{sen}(a\,\omega) + 2\cos(a\,\omega) - 2}{\omega^2}, & \text{se } \omega \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & \text{se } \omega = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X &= [\ f(0)\ \ f\left(\tfrac{1}{4}\right)\ \ f\left(\tfrac{1}{2}\right)\ \ f\left(\tfrac{3}{4}\right)\ \ f(-1)\ \ f\left(-\tfrac{3}{4}\right)\ \ f\left(-\tfrac{1}{2}\right)\ \ f\left(-\tfrac{1}{4}\right)\ ]^t \\ &= [\ 0\ \ \tfrac{1}{4}\ \ \tfrac{1}{2}\ \ \tfrac{3}{4}\ \ 1\ \ \tfrac{3}{4}\ \ \tfrac{1}{2}\ \ \tfrac{1}{4}\ ]^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y = \mathrm{FFT}(X) &= [\ 0.5\ \ -0.21\ \ 0.0\ \ -0.037\ \ 0.0\ \ -0.037\ \ 0.0\ \ -0.21\ ]^t \\ &\approx \frac{\sqrt{2\pi}}{2L}\left[\hat{f}(0)\ \hat{f}(\pi)\ \hat{f}(2\pi)\ \hat{f}(3\pi)\ \hat{f}(-4\pi)\ \hat{f}(-3\pi)\ \hat{f}(-2\pi)\ \hat{f}(-\pi)\right]^t. \end{aligned}$$

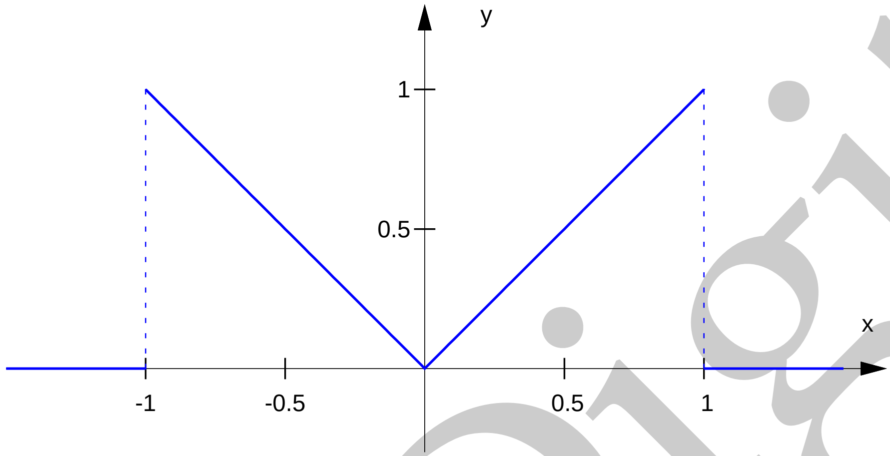

Figura 9: Função do Exemplo 15


Transformada de Fourier Discreta

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

18 de março de 2006

Sumário

1

Figura 10: Transformada de Fourier e a Transformada de Fourier Discreta da Função do Exemplo 15

7 Respostas dos Exercícios

1. Definição e Propriedades (página 15)

1.1. (a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \chi_{[-a,a]}(x) - \frac{|x|}{a}\chi_{[-a,a]}(x) = \chi_{[-a,a]}(x) - \frac{1}{a}\left(-x\chi_{[-a,0]}(x) + x\chi_{[0,a]}(x)\right) \\ &= \chi_{[-a,a]}(x) - \frac{1}{a}\left(-x\chi_{[0,a]}(-x) + x\chi_{[0,a]}(x)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x\chi_{[0,a]}(x))(\omega) &= i\frac{d\widehat{\chi_{[0,a]}}}{d\omega}(\omega) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1-e^{-ia\omega}}{i\omega}\right) \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{-a\,\omega e^{-i\,a\,\omega} - i(1-e^{-i\,a\,\omega})}{(i\omega)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i\,a\,\omega e^{-i\,a\,\omega} + e^{-i\,a\,\omega} - 1}{\omega^2}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}(-x\chi_{[0,a]}(-x))(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{-i\,a\,\omega e^{i\,a\,\omega} + e^{i\,a\,\omega} - 1}{\omega^2}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2\,\mathrm{sen}(a\omega)}{\omega} - \frac{1}{a}\left(\frac{i\,a\,\omega e^{-i\,a\,\omega} + e^{-i\,a\,\omega} - 1}{\omega^2} + \frac{-i\,a\,\omega e^{i\,a\,\omega} + e^{i\,a\,\omega} - 1}{\omega^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2\,\mathrm{sen}(a\omega)}{\omega} - \frac{1}{a}\frac{2\,a\,\omega\,\mathrm{sen}\,(a\,\omega) + 2\cos\,(a\,\omega) - 2}{\omega^2}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-\cos\,(a\,\omega)}{a\omega^2}. \end{aligned}$$

(b)

$$f(x) = \mathrm{sen}(ax)\chi_{[-b,b]}(x) = \left(\frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i}\right)\left(\chi_{[0,b]}(-x) + \chi_{[0,b]}(x)\right).$$

$$\mathcal{F}(\chi_{[-b,b]})(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{ib\omega}-1}{i\omega} + \frac{1-e^{-ib\omega}}{i\omega}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{sen}(b\omega)}{\omega}.$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\mathrm{sen}\,b(\omega-a)}{\omega-a} - \frac{\mathrm{sen}\,b(\omega+a)}{\omega+a}\right)$$

(c) Seja $g(x) = e^{-x^2}$. Então $\hat{g}(\omega) = \dfrac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{\sqrt{2}}$.

$$\mathcal{F}(xe^{-x^2})(\omega) = i\frac{d\hat{g}}{d\omega}(\omega) = -i\omega\frac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{2\sqrt{2}}$$

(d) Seja $g(x) = e^{-x^2}$. Então $\hat{g}(\omega) = \dfrac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{\sqrt{2}}$.

$$\mathcal{F}(x^2 e^{-x^2})(\omega) = -\frac{d^2\hat{g}}{d\omega^2}(\omega) = \frac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{2\sqrt{2}} - \omega^2 \frac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{4\sqrt{2}}$$

(e) Seja $g(x) = e^{-ax}u_0(x)$. Então $\hat{g}(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{a+i\omega}$. Seja $h(x) = e^{ax}u_0(-x)$.

Então, $\hat{h}(\omega) = \hat{g}(-\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{a-i\omega}$.

$$\mathcal{F}(e^{(a+ib)x}u_0(-x))(\omega) = \hat{h}(\omega - b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a+ib-i\omega}.$$

2. Inversão (página 19)

2.1. (a) Decompondo em frações parciais,

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{(2+i\omega)(3+i\omega)} = \frac{A}{2+i\omega} + \frac{B}{3+i\omega},$$

encontramos que $A = 1$ e $B = -1$. Logo $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2+i\omega} - \frac{1}{3+i\omega}$.

$$f(x) = \sqrt{2\pi}\left(e^{-2x} - e^{-3x}\right)u_0(x).$$

(b) Seja $\hat{g}(\omega) = \dfrac{1}{1+i\omega}$. Então $\dfrac{d\hat{g}}{d\omega}(\omega) = -\dfrac{i}{(1+i\omega)^2}$. Logo

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(i\frac{d\hat{g}}{d\omega})(x) = xg(x) = \sqrt{2\pi}xe^{-x}u_0(x).$$

(c) Seja $\hat{g}(\omega) = \dfrac{1}{1+\omega^2}$. Então $g(x) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}e^{-|x|}$.

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(i\omega\hat{g}(\omega))(x) = g'(x) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\frac{x\,e^{-|x|}}{|x|}.$$

(d) Completando-se o quadrado:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\omega^2+\omega+1} = \frac{1}{(\omega+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}.$$

Logo

$$f(x) = e^{-i\frac{x}{2}}\frac{\sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{\sqrt{3}|x|}{2}}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{\sqrt{3}|x|+ix}{2}}}{\sqrt{3}}.$$

(e)

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{a + ib - i\omega} = \frac{1}{a - i(\omega - b)}.$$

$$h(x) = e^{ibx}\sqrt{2\pi}e^{ax}u_0(-x) = \sqrt{2\pi}e^{(a+ib)x}u_0(-x).$$

(f) O denominador pode ser visto como um polinômio do 2o. grau em $i\omega$:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{4 - \omega^2 + 2i\omega} = \frac{1}{\left(i\,\omega - \sqrt{3}\,i + 1\right)\,\left(i\,\omega + \sqrt{3}\,i + 1\right)}.$$

Decompondo em frações parciais

$$\hat{f}(\omega) = \frac{A}{i\,\omega + \sqrt{3}\,i + 1} + \frac{B}{i\,\omega - \sqrt{3}\,i + 1}.$$

temos que $A = \frac{i}{2\sqrt{3}}$ e $B = -\frac{i}{2\sqrt{3}}$. Assim,

$$\hat{f}(\omega) = \frac{i}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{i\,(\omega + \sqrt{3}) + 1} - \frac{1}{i\,(\omega - \sqrt{3}) + 1}\right)$$

e

$$f(x) = \frac{i\sqrt{6\pi}}{6}\left(e^{-(1+\sqrt{3}i)x} - e^{-(1-\sqrt{3}i)x}\right)u_0(x)$$

2.2. (a) Seja $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Então $\hat{g}(\omega) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}e^{-|\omega|}$.

$$\hat{f}(\omega) = i\frac{d\hat{g}}{d\omega}(\omega) = -i\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\frac{\omega\,e^{-|\omega|}}{|\omega|}.$$

(b) Seja $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Então $\hat{g}(\omega) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}e^{-|\omega|}$, $g'(x) = -\dfrac{2\,x}{(x^2+1)^2}$, $f(x) = -\dfrac{1}{2}g'(x)$ e

$$\hat{f}(\omega) = -\frac{i\sqrt{2\pi}\omega}{4}e^{-|\omega|}$$

3. Convolução (página 23)

3.1. (a)

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy = \int_0^{\infty} e^{-y}e^{-2(x-y)}u_0(x-y)dy \\ &= \begin{cases} 0, \text{ se } x \le 0 \\ e^{-2x}\int_0^x e^y dy, \text{ se } x > 0 \end{cases} \\ &= e^{-2x}(e^x-1)u_0(x).\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy = \int_{-1}^{1} e^{-(x-y)}u_0(x-y)dy \\ &= \begin{cases} 0, \text{ se } x \le -1 \\ e^{-x}\int_{-1}^x e^y dy, \text{ se } -1 < x \le 1, \\ e^{-x}\int_{-1}^1 e^y dy, \text{ se } x > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } x < -1, \\ e^{-x}(e^x - e^{-1}), & \text{se } -1 \le x < 1 \\ e^{-x}(e-e^{-1}), & \text{se } x \ge 1. \end{cases}\end{aligned}$$

3.2. (a) Seja $\hat{g}(\omega) = \dfrac{1}{2+i\omega}$ e $\hat{h}(\omega) = \dfrac{1}{3+i\omega}$.

$$\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega)\hat{h}(\omega).$$

Assim,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(g*h)(x),$$

em que $g(x) = \sqrt{2\pi}e^{-2x}u_0(x)$ e $h(x) = \sqrt{2\pi}e^{-3x}u_0(x)$. Logo

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)h(x-y)dy = \sqrt{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-2y}e^{-3(x-y)}u_0(x-y)dy \\ &= \sqrt{2\pi}e^{-3x}u_0(x)\int_0^x e^y dy = \sqrt{2\pi}e^{-3x}(e^x-1)u_0(x) \\ &= \sqrt{2\pi}\left(e^{-2x}-e^{-3x}\right)u_0(x).\end{aligned}$$

(b) Seja $\hat{g}(\omega) = \dfrac{1}{1+i\omega}$. Então $g(x) = \sqrt{2\pi}e^{-x}u_0(x)$. Assim

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(g*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)g(x-y)dy \\ &= \sqrt{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-y}e^{-(x-y)}u_0(x-y)dy \\ &= \sqrt{2\pi}xe^{-x}u_0(x). \end{aligned}$$

(c) O denominador pode ser visto como um polinômio do 2o. grau em $i\omega$:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{4-\omega^2+2i\omega} = \frac{1}{\left(i\,\omega - \sqrt{3}\,i + 1\right)\left(i\,\omega + \sqrt{3}\,i + 1\right)}.$$

Sejam

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{i\,(\omega-\sqrt{3})+1}, \quad \hat{h}(\omega) = \frac{1}{i\,(\omega+\sqrt{3})+1}.$$

Então

$$g(x) = \sqrt{2\pi}e^{-(1-\sqrt{3}i)x}u_0(x), \quad h(x) = \sqrt{2\pi}e^{-(1+\sqrt{3}i)x}u_0(x).$$

Assim

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(g*h)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)h(x-y)dy \\ &= \sqrt{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-(1-\sqrt{3}i)y}e^{-(1+\sqrt{3}i)(x-y)}u_0(x-y)dy \\ &= \sqrt{2\pi}e^{-(1+\sqrt{3}i)x}\int_0^{\infty} e^{2\sqrt{3}iy}u_0(x-y)dy \\ &= \frac{i\sqrt{6\pi}}{6}\left(e^{-(1+\sqrt{3}i)x} - e^{-(1-\sqrt{3}i)x}\right)u_0(x). \end{aligned}$$

3.3. A equação pode ser escrita como

$$(f*k)(x) = \frac{1}{x^2+9},$$

em que $k(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$. Aplicando-se a transformada de Fourier na equação obtemos

$$\sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega).\hat{k}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{6}e^{-3|\omega|}.$$

Resolvendo esta equação obtemos

$$\hat{f}(\omega) = \frac{e^{-3|\omega|}}{\hat{k}(\omega)} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} e^{-|\omega|}$$

Logo

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{x^2 + 1}.$$

4. Aplicações (página 29)

4.1. Aplicando-se a transformada de Fourier em relação a variável x na equação diferencial obtemos

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega, t) + 2i\omega \hat{u}(\omega, t) = \hat{g}(\omega).$$

Resolvendo esta equação diferencial obtemos que

$$\hat{u}(\omega, t) = \frac{\hat{g}(\omega)}{2i\omega} + c(\omega) e^{-2i\omega t}.$$

Vamos supor que exista $\hat{f}(\omega)$. Neste caso, usando o fato de que $\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega)$ obtemos que

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega) e^{-2i\omega t} + \frac{\hat{g}(\omega)}{2i\omega} \left(1 - e^{-2i\omega t}\right).$$

Seja $\hat{k}(\omega, t) = \frac{1 - e^{-2i\omega t}}{2i\omega}$. Então

$$k(x, t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \chi_{[0,2t]}(x)$$

e pelo Teorema da Convolução temos que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f(x - 2t) + (k * g)(x, t) \\ &= f(x - 2t) + \frac{1}{2} \int_0^{2t} g(x - y) dy \end{aligned}$$

4.2. Aplicando-se a transformada de Fourier em relação a variável x na equação diferencial obtemos

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega, t) = -\alpha^2 \omega^2 \hat{u}(\omega, t) - \gamma \hat{u}(\omega, t).$$

Resolvendo esta equação diferencial obtemos que

$$\hat{u}(\omega,t) = c(\omega)e^{-(\alpha^2\omega^2+\gamma)t}.$$

Vamos supor que exista $\hat{f}(\omega)$. Neste caso, usando o fato de que $\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega)$ obtemos que

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)e^{-(\alpha^2\omega^2+\gamma)t}.$$

Seja $\hat{k}(\omega,t) = e^{-(\alpha^2\omega^2+\gamma)t} = e^{-\gamma t}e^{-\alpha^2\omega^2 t}$. Então

$$k(x,t) = \frac{e^{-\gamma t}}{\sqrt{2\alpha^2 t}}e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}}$$

e pelo Teorema da Convolução temos que

$$u(x,t) = \frac{e^{-\gamma t}}{\sqrt{2\pi}}(f*k)(x,t) = \frac{e^{-\gamma t}}{2\sqrt{\pi\alpha^2 t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha^2 t}}dy.$$

4.3. Aplicando-se a transformada de Fourier em relação a variável x na equação diferencial obtemos

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}(\omega,t) = -\alpha^2\omega^2\hat{u}(\omega,t) + i\omega k\hat{u}(\omega,t).$$

Resolvendo esta equação diferencial obtemos que

$$\hat{u}(\omega,t) = c(\omega)e^{-(\alpha^2\omega^2-ik\omega)t}.$$

Vamos supor que exista $\hat{f}(\omega)$. Neste caso, usando o fato de que $\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega)$ obtemos que

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)e^{-(\alpha^2\omega^2-ik\omega)t}.$$

Seja $\hat{k}(\omega,t) = e^{-(\alpha^2\omega^2-ik\omega)t} = e^{ik\omega t}e^{-\alpha^2\omega^2 t}$. Então

$$k(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha^2 t}}e^{-\frac{(x+kt)^2}{4\alpha^2 t}}$$

e pelo Teorema da Convolução temos que

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f*k)(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha^2 t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-\frac{(x-y+kt)^2}{4\alpha^2 t}}dy.$$

4.4. Aplicando-se a transformada de Fourier em relação a variável x na equação diferencial obtemos

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,t) = -\alpha^2\omega^2\hat{u}(\omega,t) + \hat{g}(\omega).$$

Resolvendo esta equação diferencial obtemos que

$$\hat{u}(\omega,t) = \frac{\hat{g}(\omega)}{\alpha^2\omega^2} + c(\omega)e^{-\alpha^2\omega^2 t}.$$

Vamos supor que exista $\hat{f}(\omega)$. Neste caso, usando o fato de que $\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega)$ obtemos que

$$c(\omega) = \hat{f}(\omega) - \frac{\hat{g}(\omega)}{\alpha^2\omega^2}$$

e

$$\hat{u}(\omega,t) = \frac{\hat{g}(\omega)}{\alpha^2\omega^2} + \left(\hat{f}(\omega) - \frac{\hat{g}(\omega)}{\alpha^2\omega^2}\right)e^{-\alpha^2\omega^2 t}.$$

Sejam $\hat{h}(\omega) = -\frac{\hat{g}(\omega)}{\alpha^2\omega^2}$ e $\hat{k}(\omega,t) = e^{-\alpha^2\omega^2 t}$. Então

$$k(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha^2 t}}e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}}$$

e $h(x)$ é a solução de

$$\alpha^2 h''(x) = -g(x).$$

Pelo Teorema da Convolução temos que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= h(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}((f+h)*k)(x,t) \\ &= h(x) + \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha^2 t}}\int_{-\infty}^{\infty}(f(y)+h(y))e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha^2 t}}dy. \end{aligned}$$

4.5. Aplicando-se a transformada de Fourier em relação a variável x na equação diferencial obtemos

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(\omega,t) = -a^2\omega^2\hat{u}(\omega,t) - 2\alpha\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,t) - \alpha^2\hat{u}(\omega,t).$$

Resolvendo esta equação diferencial obtemos que

$$\begin{aligned} \hat{u}(\omega,t) &= \hat{\phi}(\omega)e^{(-\alpha-ia\omega)t} + \hat{\psi}(\omega)e^{(-\alpha+ia\omega)t} \\ &= e^{-\alpha t}(\hat{\phi}(\omega)e^{-ia\omega t} + \hat{\psi}(\omega)e^{+ia\omega t}). \end{aligned}$$

e pelo Teorema da Translação temos que

$$u(x,t) \;=\; e^{-\alpha t}(\phi(x-at)+\psi(x+at)).$$

Aplicando-se a transformada de Fourier nas condições iniciais em relação a variável x obtemos

$$\hat{u}(\omega,0)=\hat{f}(\omega), \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,0)=\hat{g}(\omega).$$

Substituindo-se $t=0$ em $\hat{u}(\omega,t)$ obtemos

$$\hat{f}(\omega)=\hat{u}(\omega,0)=\hat{\phi}(\omega)+\hat{\psi}(\omega).$$

Derivando-se $\hat{u}(\omega,t)$ em relação a t e substituindo-se $t=0$ obtemos

$$\hat{g}(\omega)=(ia\omega-\alpha)(-\hat{\phi}(\omega)+\hat{\psi}(\omega)).$$

Logo

$$\hat{\psi}(\omega)=\frac{1}{2}\left(\hat{f}(\omega)+\frac{\hat{g}(\omega)}{ia\omega}\right),$$

$$\hat{\phi}(\omega)=\frac{1}{2}\left(\hat{f}(\omega)-\frac{\hat{g}(\omega)}{ia\omega}\right).$$

Substituindo-se em $\hat{u}(\omega,t)$ obtemos

$$\hat{u}(\omega,t)=\frac{1}{2}\left(\hat{f}(\omega)-\frac{\hat{g}(\omega)}{ia\omega}\right)e^{-ia\omega t}+\frac{1}{2}\left(\hat{f}(\omega)-\frac{\hat{g}(\omega)}{ia\omega}\right)e^{+ia\omega t}.$$

Aplicando-se a transformada de Fourier inversa obtemos

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2}\left(f(x-at)+f(x+at)\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(y)dy.$$