Seções Cônicas

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi
regi@mat.ufmg.br

11 de dezembro de 2001

Estudaremos as **(seções) cônicas**, curvas planas que são obtidas da interseção de um cone circular com um plano. Vamos estudar a elipse, a hipérbole e a parábola, que são chamadas de **cônicas não degeneradas**. Vamos defini-las em termos de lugares geométricos. As outras cônicas, que incluem um único ponto, um par de retas, são chamadas **cônicas degeneradas**.

1 Cônicas Não Degeneradas

1.1 Elipse

Definição 1.1. Uma **elipse** é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 (**focos**) é constante, ou seja, se $\text{dist}(F_1, F_2) = 2c$, então a elipse é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a, \quad \text{em que } a > c.$$

Proposição 1.1. *(a) A equação de uma **elipse** cujos focos são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ é*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \tag{1}$$

em que $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

*(b) A equação de uma **elipse** cujos focos são $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$ é*

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1\,, \tag{2}$$

em que $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

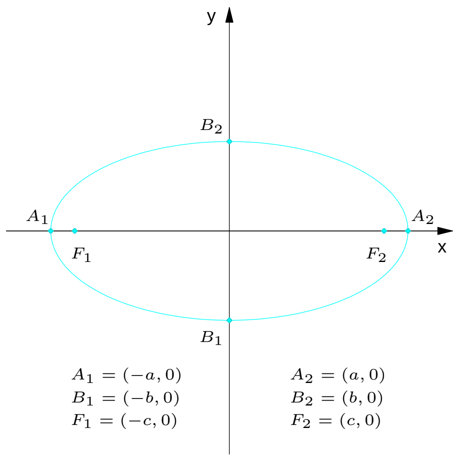

Figura 1: Elipse com focos nos pontos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$

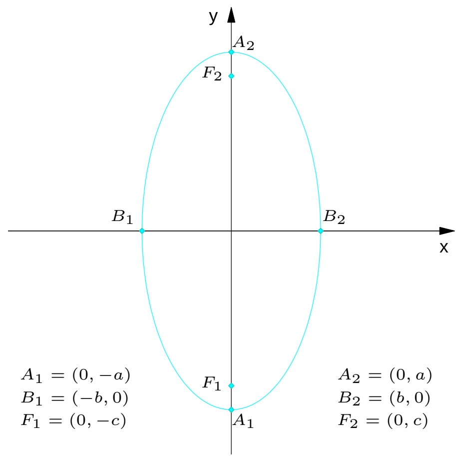

Figura 2: Elipse com focos nos pontos $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$

Demonstração. Vamos provar a primeira parte e deixamos para o leitor, como exercício, a demonstração da segunda parte. A elipse é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a\,,$$

ou seja,

$$||\ \overrightarrow{PF_1}\ || + ||\ \overrightarrow{PF_1}\ || = 2a,$$

que neste caso é

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx\,.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, obtemos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como $a > c$, então $a^2 - c^2 > 0$. Assim, podemos definir $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ e dividir e equação acima por $a^2b^2 = a^2(a^2 - c^2)$, obtendo (1). $\square$

Nas Figuras 1 e 2, os pontos A_1 e A_2 são chamados **vértices da elipse**. Os segmentos A_1A_2 e B_1B_2 são chamados **eixos da elipse**. A reta que passa pelos focos é chamada **eixo focal**. A **excentricidade** da elipse é o número $e = \dfrac{c}{a}$. Como, $c < a$, a excentricidade de uma elipse é um número real não negativo menor que 1. Observe que se $F_1 = F_2$, então a elipse reduz-se à **circunferência** de raio a. Além disso, como $c = 0$, então $e = 0$. Assim, uma circunferência é uma elipse de excentricidade nula.

A elipse é a curva que se obtém seccionando-se um cone com um plano que não passa pelo vértice, não é paralelo a uma **reta geratriz** (reta que gira em torno do eixo do cone de forma a gerá-lo) e que corta apenas uma das folhas da superfície.

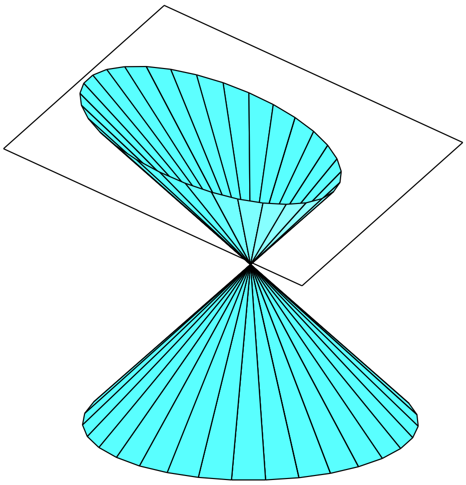

Figura 3: Elipse obtida seccionando-se um cone com um plano

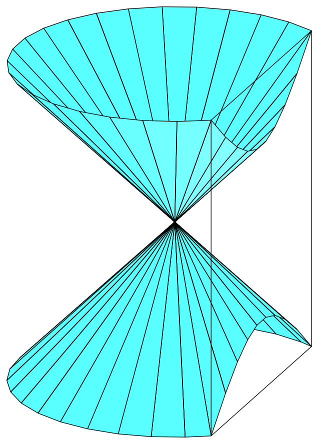

Figura 4: Hipérbole obtida seccionando-se um cone com um plano

1.2 Hipérbole

Definição 1.2. Uma **hipérbole** é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano tais que o módulo da diferença entre as distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 (**focos**) é constante, ou seja, se $\text{dist}(F_1, F_2) = 2c$, então a hipérbole é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$|\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 2a, \quad \text{em que } a < c.$$

Proposição 1.2. *(a) A equação de uma* ***hipérbole*** *cujos focos são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ é*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

e das ***assíntotas*** *(retas para onde a curva se aproxima, quando $x \to \pm\infty$),*

$$y = \pm\frac{b}{a}x,$$

em que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

(b) A equação de uma ***hipérbole*** *cujos focos são $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$ é*

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

e das assíntotas (retas para onde a curva se aproxima, quando $x \to \pm\infty$),

$$x = \pm\frac{a}{b}y,$$

em que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

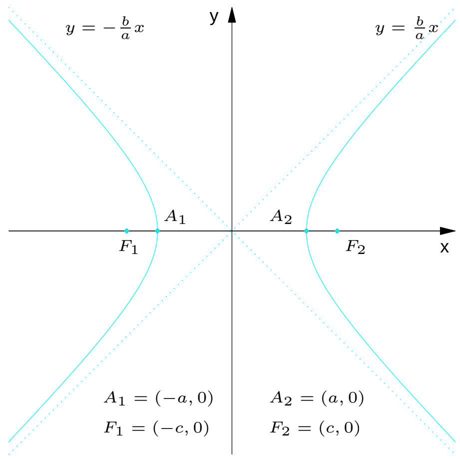

Figura 5: Hipérbole com focos nos pontos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$

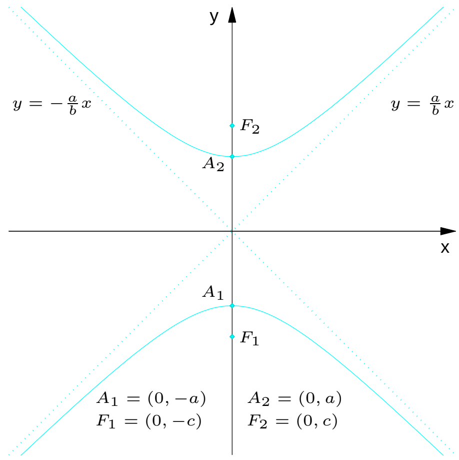

Figura 6: Hipérbole com focos nos pontos $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$

Demonstração. Vamos provar a primeira parte e deixamos para o leitor, como exercício, a demonstração da segunda parte. A hipérbole é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2) = \pm 2a\,,$$

ou seja,

$$||\, \overrightarrow{PF_1}\, || - ||\, \overrightarrow{PF_2}\, || = \pm 2a,$$

que neste caso é

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, temos

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx\,.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, temos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como $a < c$, então $c^2 - a^2 > 0$. Assim, podemos definir $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ e dividir e equação acima por $-a^2b^2 = a^2(a^2 - c^2)$, obtendo (3).

Se a equação (3) é resolvida em y obtemos $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ que, para $x > 0$, pode ser escrita como

$$y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Se x tende a $+\infty$, então o radical no segundo membro se aproxima de 1 e a equação tende a

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

O mesmo ocorre para $x < 0$, quando x tende a $-\infty$ (verifique!). $\square$

Nas Figuras 5 e 6, os pontos A_1 e A_2 são chamados **vértices da hipérbole**. A reta que passa pelos focos é chamada **eixo focal**. A **excentricidade** da hipérbole é o número $e = \dfrac{c}{a}$. Como, $c > a$, a excentricidade de uma hipérbole é um número real maior que 1. A hipérbole é a curva que se obtém seccionando-se um cone por um plano paralelo ao seu eixo que não passa pelo vértice.

1.3 Parábola

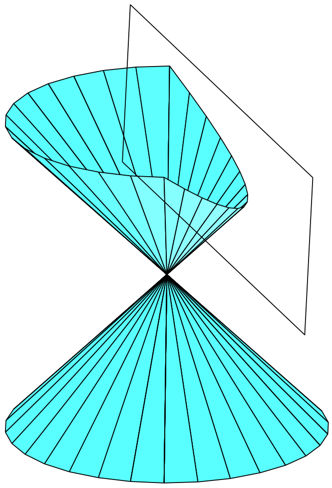

Figura 7: Parábola obtida seccionando-se um cone com um plano

---

Definição 1.3. Uma **parábola** é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano eqüidistantes de uma reta r (**diretriz**) e de um ponto F (**foco**), não pertencente a r, ou seja, a parábola é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\mathrm{dist}(P, F) = \mathrm{dist}(P, r)\,.$$

Proposição 1.3. *(a) A equação de uma **parábola** com foco $F = (p, 0)$ e reta diretriz $r : x = -p$ é*

$$y^2 = 4px\,. \tag{5}$$

*(b) A equação de uma **parábola** com foco $F = (0, p)$ e reta diretriz $r : y = -p$ é*

$$x^2 = 4py\,. \tag{6}$$

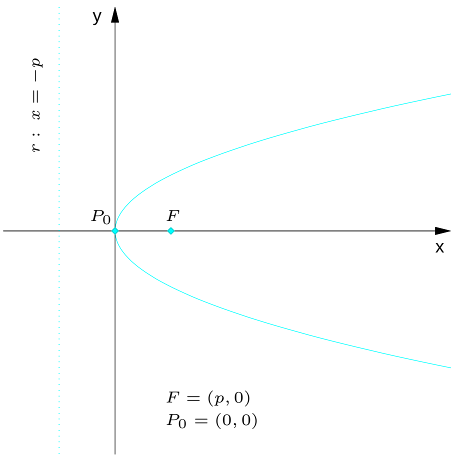

Figura 8: Parábola com foco no ponto $F = (p, 0)$ e $p > 0$

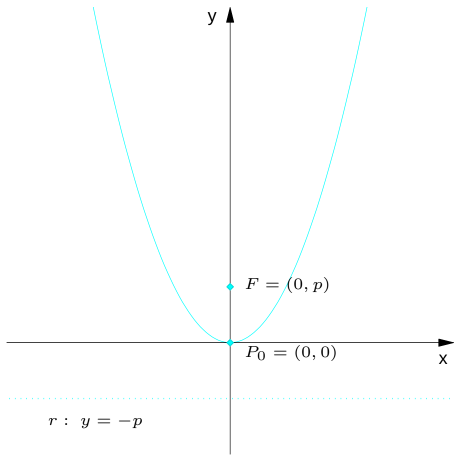

Figura 9: Parábola com foco no ponto $F = (0, p)$ e $p > 0$

Demonstração. Vamos provar a primeira parte e deixamos para o leitor, como exercício, a demonstração da segunda parte. A parábola é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\operatorname{dist}(P, F) = \operatorname{dist}(P, r)\,,$$

que neste caso é

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x + p|\,,$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos (5). $\square$

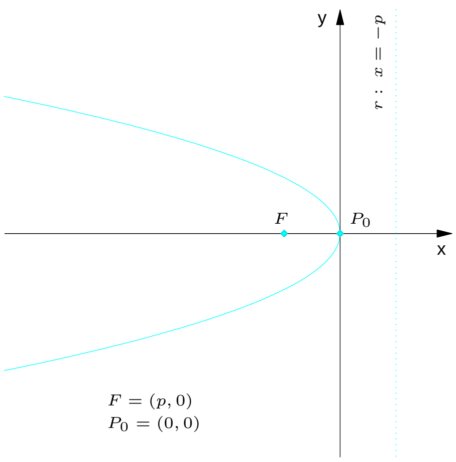

Figura 10: Parábola com foco no ponto $F = (p, 0)$ e $p < 0$

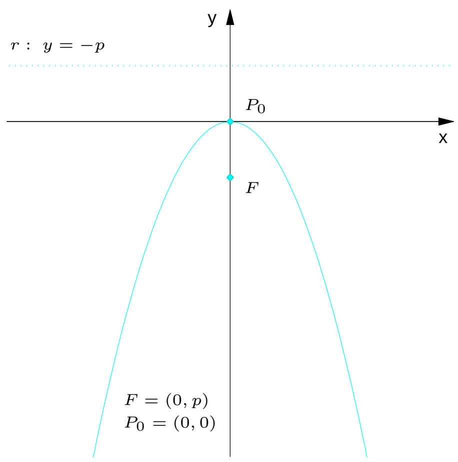

Figura 11: Parábola com foco no ponto $F = (0, p)$ e $p < 0$

Nas Figuras 8, 9, 10 e 11, o ponto P_0 é o ponto da parábola mais próximo da reta diretriz e é chamado de **vértice da parábola**. A parábola é a curva que se obtém seccionando-se um cone por um plano paralelo a uma **reta geratriz do cone** conforme a Figura 7 na página 5.

1.4 Caracterização das Cônicas

Vamos mostrar a seguir que todas as cônicas não degeneradas, com exceção da circunferência, podem ser descritas de uma mesma maneira.

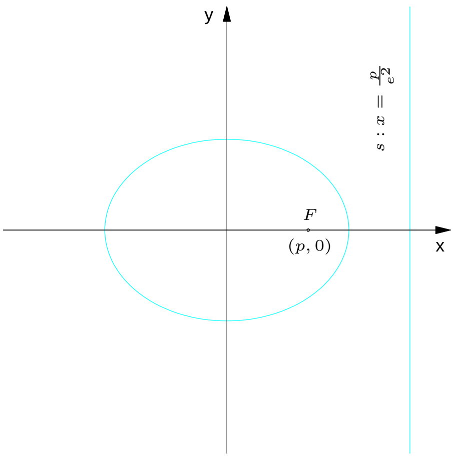

Figura 12: Elipse, um de seus focos e a reta diretriz à direita

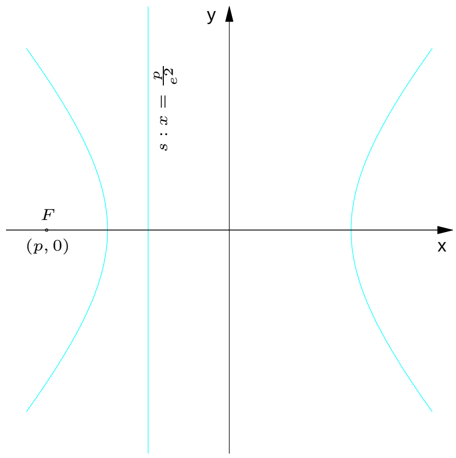

Figura 13: Hipérbole, um de seus focos e a reta diretriz à direita

---

Proposição 1.4. *Seja s uma reta fixa (**diretriz**) e F um ponto fixo (**foco**) não pertencente a s. O conjunto dos pontos do plano $P = (x, y)$ tais que*

$$\text{dist}(P, F) = e\,\text{dist}(P, s), \tag{7}$$

em que $e > 0$ é uma constante fixa, é uma cônica.

(a) Se $e = 1$, então a cônica é uma parábola.

(b) Se $0 < e < 1$, então a cônica é uma elipse.

(c) Se $e > 1$, então a cônica é uma hipérbole.

Reciprocamente, toda cônica que não seja uma circunferência pode ser descrita por uma equação da forma (7).

Demonstração. Se $e = 1$, a equação (7) é a própria definição da parábola. Vamos considerar o caso em que $e > 0$, com $e \neq 1$. Seja $d = \text{dist}(F, s)$. Sem perda de generalidade podemos tomar o foco como sendo o ponto $F = (p, 0)$ e a diretriz como sendo a reta vertical $s : x = \dfrac{p}{e^2}$, em que $p = \frac{de^2}{1-e^2}$ se a reta s estiver à direita do foco F (Figuras 12 e 13) e $p = \frac{de^2}{e^2-1}$ se a reta s estiver à esquerda do foco F (Figuras 14 e 15).

Assim o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\text{dist}(P, F) = e\,\text{dist}(P, s)\,,$$

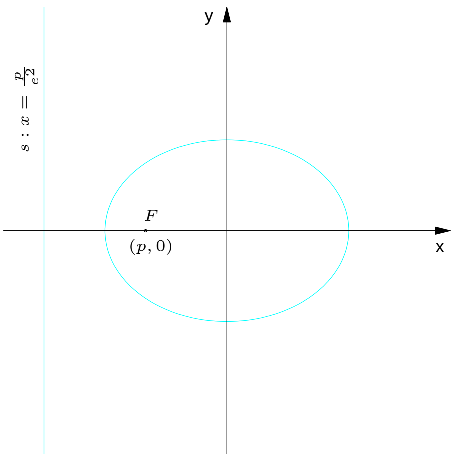

Figura 14: Elipse, um de seus focos e a reta diretriz à esquerda

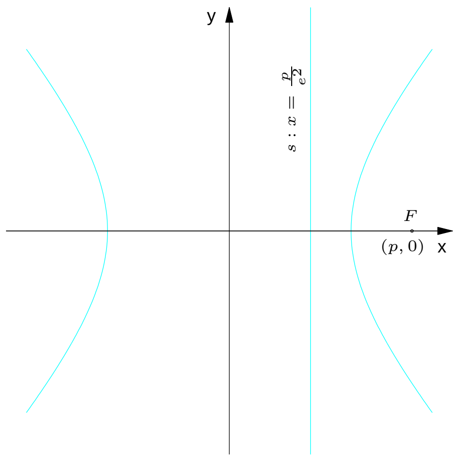

Figura 15: Hipérbole, um de seus focos e a reta diretriz à esquerda

pode ser descrito como sendo o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = e\left|x - \frac{p}{e^2}\right|,$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos

$$(1-e^2)x^2 + y^2 = p^2\left(\frac{1}{e^2} - 1\right)$$

que pode ainda ser escrito como

$$\frac{x^2}{\frac{p^2}{e^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2(1-e^2)}{e^2}} = 1. \tag{8}$$

Se $0 < e < 1$, esta é a equação de uma elipse. Se $e > 1$, é a equação de uma hipérbole.

Para mostrar a recíproca, considere uma elipse ou hipérbole com excentricidade $e > 0$ e um dos focos em $F = (p, 0)$. É fácil verificar que (8) é a equação desta cônica e portanto (7) também o é, com a reta diretriz sendo $s : x = \dfrac{p}{e^2}$. $\square$

Exercícios Numéricos

1.1. Reduzir cada uma das equações de forma a identificar a cônica que ela representa e faça um esboço do seu gráfico:

(a) $4x^2 + 2y^2 = 1$

(b) $x^2 + y = 0$

(c) $x^2 - 9y^2 = 9$

1.2. Escreva as equações das seguintes elipses:

(a) Os focos são $F_1 = (-1, 2)$ e $F_2 = (3, 2)$ e satisfaz $\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 6$;

(b) Os focos são $F_1 = (-1, -1)$ e $F_2 = (1, 1)$ e satisfaz $\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 4$;

1.3. Escreva as equações das seguintes hipérboles:

(a) Os focos são $F_1 = (3, -1)$ e $F_2 = (3, 4)$ e satisfaz $|\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 3$;

(b) Os focos são $F_1 = (-1, -1)$ e $F_2 = (1, 1)$ e satisfaz $|\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 2$;

1.4. Escreva as equações das seguintes parábolas:

(a) O foco é $F = (0, 2)$ e diretriz $y = -2$;

(b) O foco é $F = (0, 0)$ e diretriz $x + y = 2$;

Exercícios Teóricos

1.5. Mostre que a equação da elipse com focos nos pontos $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$ e satisfaz

$$\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a, \quad \text{em que } a > c$$

é

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

em que $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

1.6. Mostre que a equação da hipérbole com focos nos pontos $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$ e satisfaz

$$|\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 2a, \quad \text{em que } a < c$$

é

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

em que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

1.7. Mostre que a equação da parábola com foco no ponto $F = (x_0 + p, y_0)$ e reta diretriz $r : \; x = x_0 - p$ é

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0).$$

1.8. Seja uma elipse ou hipérbole com um dos focos em $F = (p, 0)$. Definindo a reta $r : x = \dfrac{p}{e^2}$, em que e é a excentricidade.

(a) Mostre que

$$\frac{x^2}{\frac{p^2}{e^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2(1-e^2)}{e^2}} = 1$$

é a equação desta cônica.

(b) Mostre que esta cônica pode ser descrita pelo conjunto de pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\mathrm{dist}(P, F) = e\,\mathrm{dist}(P, r).$$

2 Coordenadas Polares e Equações Paramétricas

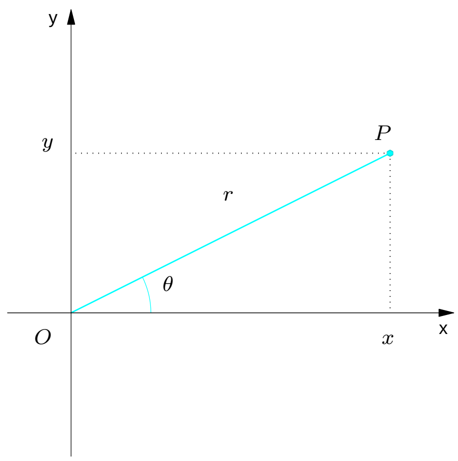

Figura 16: Ponto P do plano em coordenadas polares (r, θ) e cartesianas (x, y)

Até agora vimos usando o chamado **sistema de coordenadas cartesianas**, em que um ponto do plano é localizado em relação a duas retas fixas perpendiculares entre si. Vamos definir um outro sistema de coordenadas chamado de **sistema de coordenadas polares** em que um ponto do plano é localizado em relação a um ponto e a uma reta que passa por esse ponto.

Escolhemos um ponto O (usualmente a origem do sistema cartesiano), chamado **polo** e uma reta orientada passando pelo polo chamada **eixo polar** (usualmente tomamos o próprio eixo **x** do sistema cartesiano). No sistema de coordenadas polares um ponto no plano é localizado dando-se a distância do ponto ao polo, $r = \text{dist}(P, O)$ e o ângulo, θ, entre os vetores $\overrightarrow{OP}$ e um vetor na direção e sentido do eixo polar, com a mesma convenção da trigonometria, ou seja, ele é positivo se medido no sentido anti-horário a partir do eixo polar e negativo se medido no sentido horário a partir do eixo polar. As coordenadas polares de um ponto P do plano são escritas na forma (r, θ).

Segue facilmente as relações entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas polares.

Proposição 2.1. *Suponha que o polo e o eixo polar do sistema de coordenadas polares coincidem com a origem e o eixo $\boldsymbol{x}$ do sistema de coordenadas cartesianas, respectivamente. Então a transformação entre os sistemas de coordenadas polares e o de coordenadas cartesianas podem ser realizadas pelas equações*

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r \,\text{sen}\,\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{e} \quad \text{sen}\,\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \textit{se } x^2 + y^2 \neq 0.$$

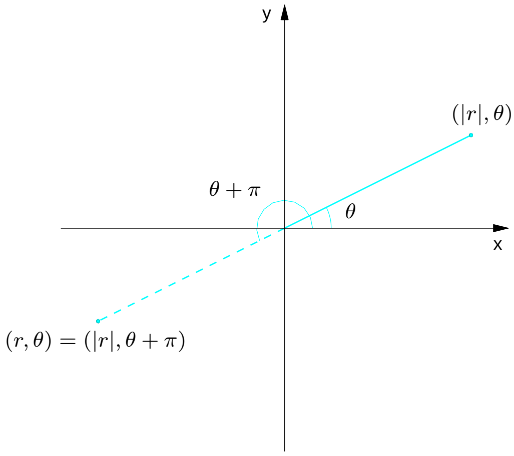

Figura 17: Para $r < 0$, $(r, \theta) = (|r|, \theta + \pi)$

Estendemos as coordenadas polares para o caso no qual r é negativo da seguinte forma:

$$\text{para } r < 0, \quad (r, \theta) = (|r|, \theta + \pi).$$

Assim, (r, θ) e $(-r, \theta)$ estão na mesma reta que passa pelo polo, à distância $|r|$ do polo, mas em lados opostos em relação ao polo.

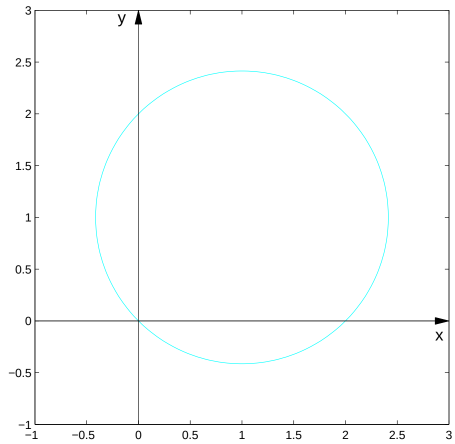

Figura 18: Circunferência com equação em coordenadas polares $r - 2\cos\theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$

Exemplo 2.1. Vamos determinar a equação em coordenadas polares da circunferência cuja equação em coordenadas retangulares é

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

ou simplificando

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0.$$

Substituindo-se x por $r\cos\theta$ e y por $r\,\mathrm{sen}\,\theta$ obtemos

$$r^2 - 2r\cos\theta - 2r\,\mathrm{sen}\,\theta = 0.$$

Dividindo-se por r ficamos com

$$r - 2\cos\theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta = 0.$$

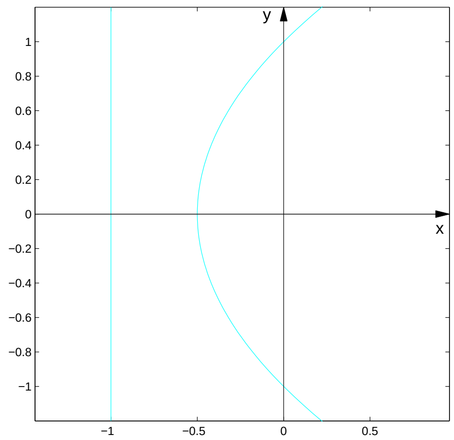

Figura 19: Parábola com equação em coordenadas polares $r = \dfrac{1}{1-\cos\theta}$

Exemplo 2.2. Vamos determinar a equação em coordenadas retangulares do lugar geométrico cuja equação em coordenadas polares é

$$r = \frac{1}{1-\cos\theta}.$$

Substituindo-se r por $\sqrt{x^2+y^2}$ e $\cos\theta$ por $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ obtemos

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

ou simplificando

$$\sqrt{x^2+y^2} - x = 1.$$

Somando-se x a ambos os membros obtemos

$$\sqrt{x^2+y^2} = 1 + x.$$

Elevando-se ao quadrado obtemos

$$x^2 + y^2 = (1+x)^2.$$

Simplificando-se obtemos ainda

$$y^2 = 1 + 2x = 2(x + 1/2),$$

que é uma parábola com foco na origem $F = (0,0)$ e reta diretriz $x = -1$ (verifique!).

2.1 Cônicas em Coordenadas Polares

A equação polar de uma cônica, que não é uma circunferência, assume uma forma simples quando um foco F está no polo e a reta diretriz s é paralela ou perpendicular ao eixo polar. Seja $d = \text{dist}(F, s)$. Para deduzir a equação polar das cônicas vamos usar a caracterização dada na Proposição 1.4 na página 7, ou seja, que uma cônica é o lugar geométrico dos pontos P que satisfazem

$$\text{dist}(P, F) = e\,\text{dist}(P, s)$$

Como o foco F está no polo, temos que $\text{dist}(P, F) = r$, em que (r, θ) são as coordenadas polares de P.

(a) Se a reta diretriz, s, é perpendicular ao eixo polar.

  (i) Se a reta s está à *direita* do polo, obtemos que $\text{dist}(P, r) = d - r\cos\theta$. Assim a equação da cônica fica sendo

$$r = e(d - r\cos\theta).$$

  Isolando r obtemos

$$r = \frac{de}{1 + e\cos\theta}.$$

  (ii) Se a reta s está à *esquerda* do polo, obtemos que $\text{dist}(P, s) = d + r\cos\theta$. Assim a equação da cônica fica sendo

$$r = e(d + r\cos\theta).$$

  Isolando r obtemos

$$r = \frac{de}{1 - e\cos\theta}.$$

(b) Se a reta diretriz, s, é paralela ao eixo polar.

  (i) Se a reta s está *acima* do polo, obtemos que $\text{dist}(P, r) = d - r\,\text{sen}\,\theta$. Assim a equação da cônica fica sendo

$$r = e(d - r\,\text{sen}\,\theta).$$

  Isolando r obtemos

$$r = \frac{de}{1 + e\,\text{sen}\,\theta}.$$

  (ii) Se a reta s está *abaixo* do polo, obtemos que $\text{dist}(P, r) = d + r\,\text{sen}\,\theta$. Assim a equação da cônica fica sendo

$$r = e(d + r\,\text{sen}\,\theta).$$

  Isolando r obtemos

$$r = \frac{de}{1 - e\,\text{sen}\,\theta}.$$

Isto prova o seguinte resultado

Proposição 2.2. *Considere uma cônica com excentricidade* $e > 0$ *(que não é uma circunferência), que tem um foco* F *no polo e a reta diretriz* s *é paralela ou perpendicular ou eixo polar, com* $d = \text{dist}(s, F)$.

(a) *Se a reta diretriz correspondente a* F *é perpendicular ao eixo polar e está* ***à direita*** *do polo, então a equação polar da cônica é*

$$r = \frac{de}{1 + e\cos\theta}$$

e se está ***à esquerda*** *do polo, então a equação polar da cônica é*

$$r = \frac{de}{1 - e\cos\theta}$$

(b) *Se a reta diretriz correspondente a* F *é paralela ao eixo polar e está* ***acima*** *do polo, então a equação polar da cônica é*

$$r = \frac{de}{1 + e\,\text{sen}\,\theta}$$

e se está ***abaixo*** *do polo, então a equação polar da cônica é*

$$r = \frac{de}{1 - e\,\text{sen}\,\theta}$$

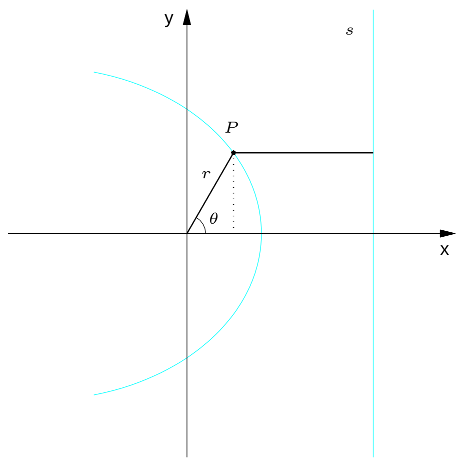

Figura 20: Parte de uma cônica com foco no polo e reta diretriz perpendicular ao eixo polar à direita

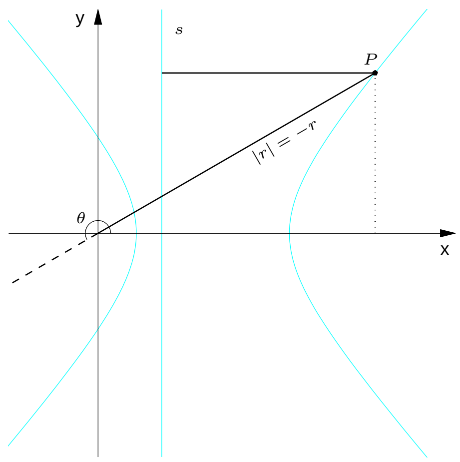

Figura 21: Hipérbole com foco no polo e reta diretriz perpendicular ao eixo polar à direita

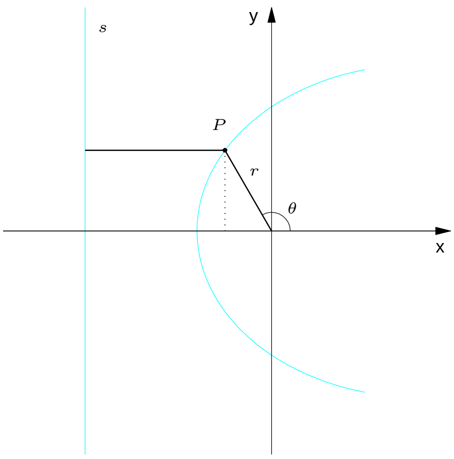

Figura 22: Parte de uma cônica com foco no polo e reta diretriz perpendicular ao eixo polar à esquerda

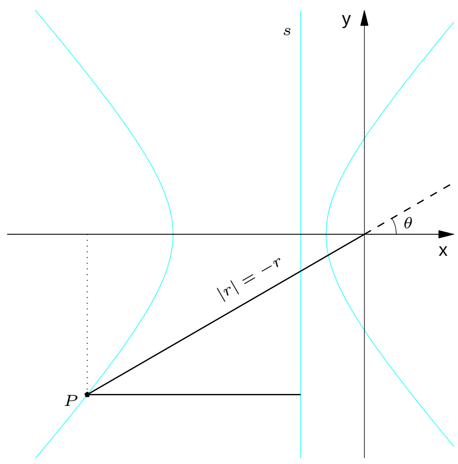

Figura 23: Hipérbole com foco no polo e reta diretriz perpendicular ao eixo polar à esquerda

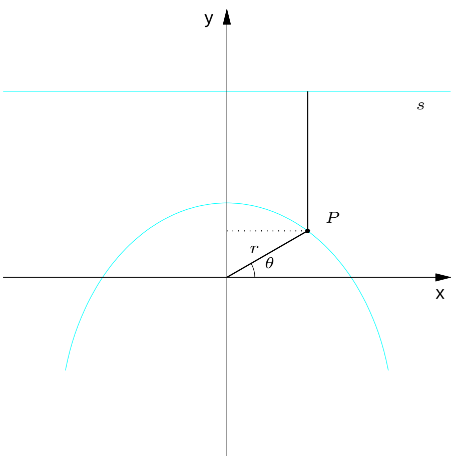

Figura 24: Parte de uma cônica com foco no polo e reta diretriz paralela ao eixo polar acima

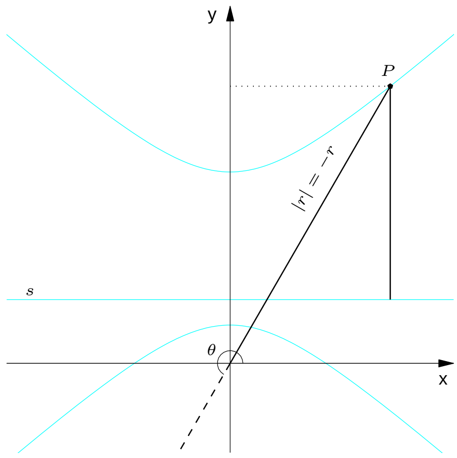

Figura 25: Hipérbole com foco no polo e reta diretriz paralela ao eixo polar acima

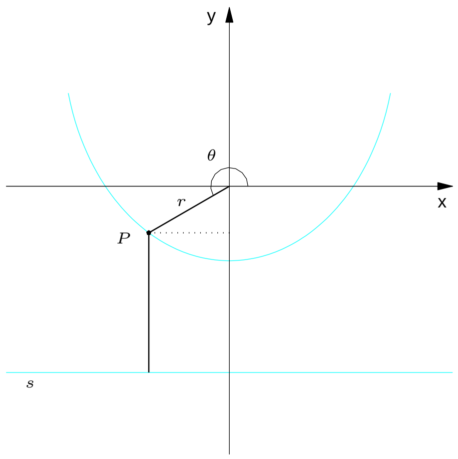

Figura 26: Parte de uma cônica com foco no polo e reta diretriz paralela ao eixo polar abaixo

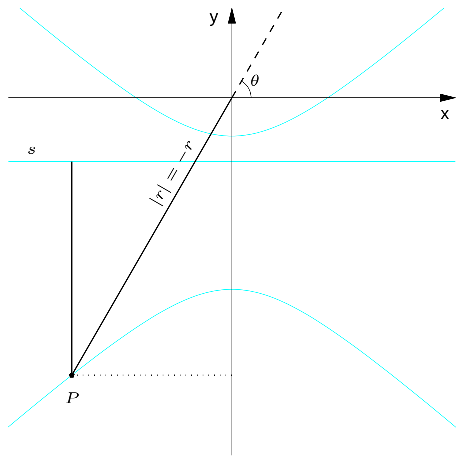

Figura 27: Hipérbole com foco no polo e reta diretriz paralela ao eixo polar abaixo

Exemplo 2.3. Vamos identificar a cônica cuja equação em coordenadas polares é

$$r = \frac{4}{2 + \cos\theta}.$$

Dividindo-se o numerador e o denominador do segundo membro da equação por 2 obtemos

$$r = \frac{2}{1 + \frac{1}{2}\cos\theta},$$

que é a equação em coordenadas polares de uma elipse com excentricidade igual a 1/2, um dos focos no polo, reta diretriz $x = 4$ (coordenadas cartesianas) ou $r\cos\theta = 4$ (coordenadas polares). Vamos encontrar as coordenadas polares dos vértices. Para isso, fazemos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ na equação polar da elipse obtendo $r = 4/3$ e $r = 4$, respectivamente.

2.2 Circunferência em Coordenadas Polares

A forma mais simples da equação de uma circunferência em coordenadas polares ocorre quando seu centro está no polo. Neste caso a equação é simplesmente $r = a$, em que a é o raio da circunferência. Além deste caso, a equação polar de uma circunferência assume uma forma simples quando ela passa pelo polo e o seu centro está no eixo polar ou na reta perpendicular ao eixo polar que passa pelo polo.

(a) Se o centro está no eixo polar.

(i) Se o raio é igual a a e o centro em coordenadas polares é $C = (a, 0)$. Se P é um ponto qualquer da circunferência, então

$$\begin{aligned} a^2 &= ||\overrightarrow{CP}||^2 = ||\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}||^2 = ||\overrightarrow{OP}||^2 + ||\overrightarrow{OC}||^2 - 2\,\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC} \\ &= r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta. \end{aligned}$$

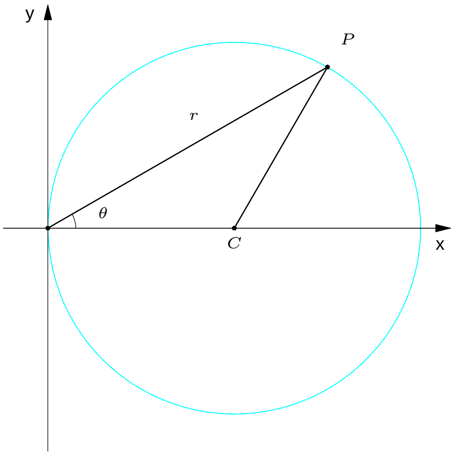

Figura 28: Circunferência que passa pelo polo com centro no eixo polar à direita

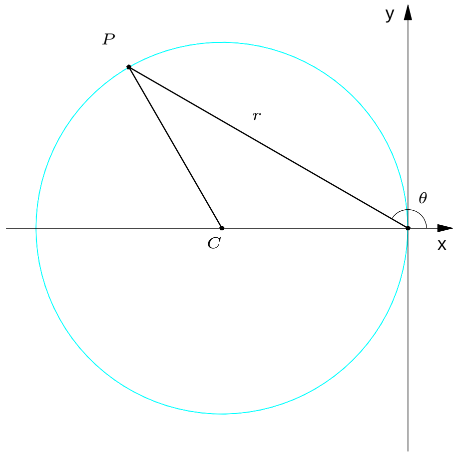

Figura 29: Circunferência que passa pelo polo com centro no eixo polar à esquerda

Assim,

$$r^2 = 2ra\cos\theta$$

ou

$$r(r - 2a\cos\theta) = 0$$

Logo a equação em coordenadas polares da circunferência é

$$r = 2a\cos\theta.$$

(ii) Se o raio é igual a a e o centro em coordenadas polares é $C = (a, \pi)$. Se P é um ponto qualquer da circunferência, então

$$\begin{aligned} a^2 &= \|\, \overrightarrow{CP}\, \|^2 = \|\, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}\, \|^2 = \|\, \overrightarrow{OP}\, \|^2 + \|\, \overrightarrow{OC}\, \|^2 - 2\,\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC} \\ &= r^2 + a^2 - 2ra\cos(\pi - \theta). \end{aligned}$$

Assim,

$$r^2 = -2ra\cos\theta$$

ou

$$r(r + 2a\cos\theta) = 0$$

Logo a equação em coordenadas polares da circunferência é

$$r = -2a\cos\theta.$$

(b) Se o centro está na reta perpendicular ao eixo polar que passa pelo polo.

(i) Se o raio é igual a a e o centro em coordenadas polares é $C = (a, \pi/2)$. Se P é um ponto qualquer da circunferência, então

$$\begin{aligned} a^2 &= \|\, \overrightarrow{CP}\, \|^2 = \|\, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}\, \|^2 = \|\, \overrightarrow{OP}\, \|^2 + \|\, \overrightarrow{OC}\, \|^2 - 2\,\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC} \\ &= r^2 + a^2 - 2ra\cos(\pi/2 - \theta). \end{aligned}$$

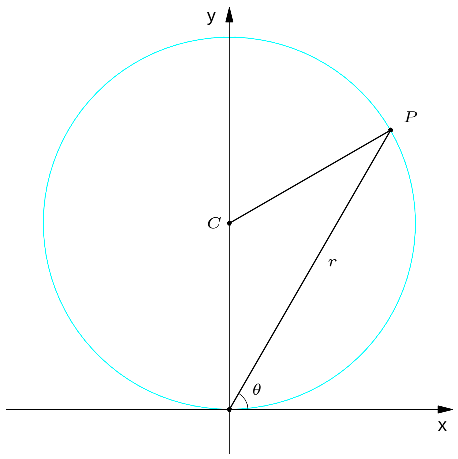

Figura 30: Circunferência que passa pelo polo com centro acima do polo na reta perpendicular ao eixo polar que passa pelo polo

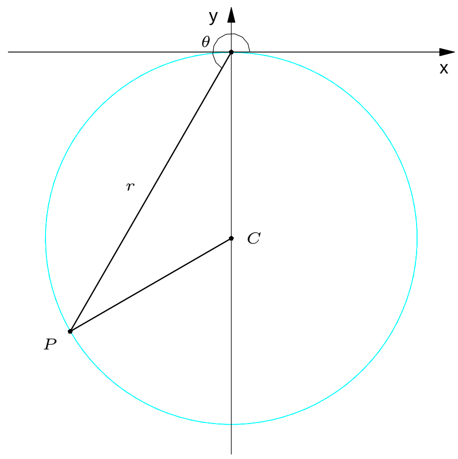

Figura 31: Circunferência que passa pelo polo com centro abaixo do polo na reta perpendicular ao eixo polar que passa pelo polo

Assim,

$$r^2 = 2ra \operatorname{sen} \theta$$

ou

$$r(r - 2a \operatorname{sen} \theta) = 0$$

Logo a equação em coordenadas polares da circunferência é

$$r = 2a \operatorname{sen} \theta.$$

(ii) Se o raio é igual a a e o centro em coordenadas polares é $C = (a, -\pi/2)$. Se P é um ponto qualquer da circunferência, então

$$\begin{aligned} a^2 &= \|\, \overrightarrow{CP} \,\|^2 = \|\, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} \,\|^2 = \|\, \overrightarrow{OP} \,\|^2 + \|\, \overrightarrow{OC} \,\|^2 - 2\, \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= r^2 + a^2 - 2ra \cos(-\pi/2 - \theta). \end{aligned}$$

Assim,

$$r^2 = -2ra \operatorname{sen} \theta$$

ou

$$r(r + 2a \operatorname{sen} \theta) = 0$$

Logo a equação em coordenadas polares da circunferência é

$$r = -2a \operatorname{sen} \theta.$$

Proposição 2.3. *Considere uma circunferência de raio a que passa pelo polo cujo centro está no eixo polar ou na reta perpendicular ao eixo polar que passa pelo polo.*

(a) *Se o centro está no eixo polar e **à direita** do polo, então a equação polar da circunferência é dada por*

$$r = 2a\cos\theta$$

*e se o centro está **à esquerda** do polo, então a equação polar da circunferência é dada por*

$$r = -2a\cos\theta.$$

(b) *Se o centro está na reta perpendicular ao eixo polar que passa pelo polo e **acima** do polo, então a equação polar é dada por*

$$r = 2a\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

*e se está **abaixo** do polo, então a equação polar da circunferência é dada por*

$$r = -2a\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Exemplo 2.4. Uma circunferência cuja equação em coordenadas polares é

$$r = -3\cos\theta$$

passa pelo polo, tem raio igual a $3/2$ e as coordenadas polares do seu centro são $(3/2, \pi)$.

2.3 Equações Paramétricas

Seja

$$F(x, y) = 0 \tag{9}$$

a equação de uma curva plana $\mathcal{C}$ em coordenadas retangulares. Sejam x e y funções de uma terceira variável t em um subconjunto, $\mathcal{I}$, do conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, ou seja,

$$x = f(t) \quad \text{e} \quad y = g(t), \quad \text{para todo } t \in \mathcal{I}. \tag{10}$$

Se para qualquer valor da variável t no conjunto $\mathcal{I}$, os valores de x e y determinados pelas equações (10) satisfazem (9), então as equações (10) são chamadas **equações paramétricas da curva** $\mathcal{C}$ e a variável independente t é chamada **parâmetro**. Dizemos também que as equações (10) formam uma **representação paramétrica da curva** $\mathcal{C}$. A representação paramétrica de curvas tem um papel importante no traçado de curvas pelo computador.

Exemplo 2.5. Seja a um número real positivo fixo. A circunferência de equação

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{11}$$

pode ser representada parametricamente pelas equações

$$x = a\cos t \quad \text{e} \quad y = a\,\mathrm{sen}\,t, \quad \text{para todo } t \in [0, 2\pi]. \tag{12}$$

Pois elevando ao quadrado cada uma das equações (12) e somando os resultados obtemos

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t = a^2.$$

A circunferência definida por (11) pode também ser representada parametricamente por

$$x = t \quad \text{e} \quad y = \sqrt{a^2 - t^2}, \quad \text{para todo } t \in [0, a^2]. \tag{13}$$

ou por

$$x = t \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{a^2 - t^2}, \quad \text{para todo } t \in [0, a^2]. \tag{14}$$

Apenas que com (13) obtemos somente a parte de cima da circunferência e com (14) obtemos somente a parte de baixo.

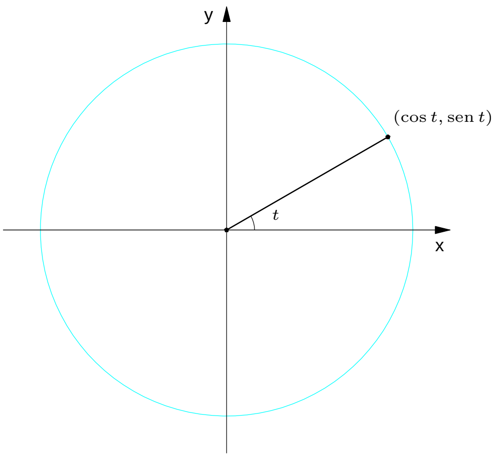

Figura 32: Circunferência parametrizada

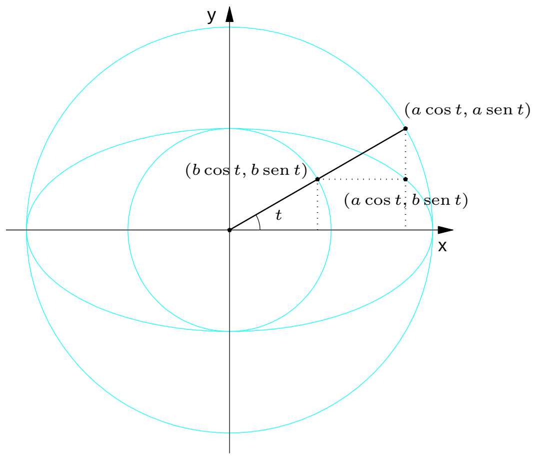

Figura 33: Elipse parametrizada

Exemplo 2.6. A elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{15}$$

pode ser representada parametricamente pelas equações

$$x = a \cos t \quad \text{e} \quad y = b \operatorname{sen} t, \quad \text{para todo } t \in [0, 2\pi]. \tag{16}$$

Pois elevando ao quadrado e dividindo por a^2 a primeira equação em (16), elevando ao quadrado e dividindo por b^2 a segunda equação em (16) e somando os resultados obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1.$$

Exemplo 2.7. A hipérbole de equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{17}$$

pode ser representada parametricamente pelas equações

$$x = a \sec t \quad \text{e} \quad y = b \tan t, \quad \text{para todo } t \in [0, 2\pi],\ t \neq \pi/2, 3\pi/2. \tag{18}$$

Pois elevando ao quadrado e dividindo por a^2 a primeira equação em (18), elevando ao quadrado e dividindo por b^2 a segunda equação em (18) e subtraindo os resultados obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \sec^2 t - \tan^2 t = 1.$$

Vamos apresentar uma outra representação paramétrica da hipérbole. Para isso vamos definir duas funções

$$f_1(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{e} \quad f_2(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}. \tag{19}$$

A hipérbole definida por (17) pode, também, ser representada parametricamente por

$$x = a f_1(t) \quad \text{e} \quad y = b f_2(t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

Pois elevando ao quadrado e dividindo por a^2 a primeira equação em (20), elevando ao quadrado e dividindo por b^2 a segunda equação em (20) e subtraindo os resultados obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = (f_1(t))^2 - (f_2(t))^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2t} + 2 + e^{-2t}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2t} - 2 + e^{-2t}\right) = 1. \tag{21}$$

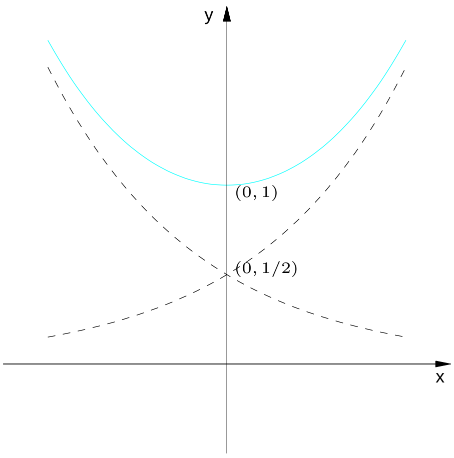

Figura 34: Cosseno hiperbólico

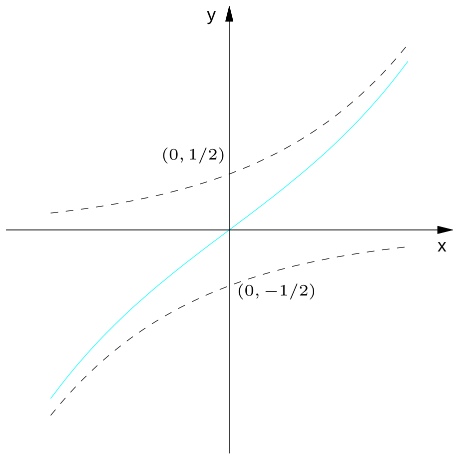

Figura 35: Seno hiperbólico

As funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ definidas por (19) recebem o nome de **cosseno hiperbólico** e **seno hiperbólico**, respectivamente e são denotadas por $\cosh t$ e $\operatorname{senh} t$. De (21) segue a seguinte relação fundamental entre o cosseno e o seno hiperbólicos

$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1. \tag{22}$$

e a representação paramétrica (20) pode ser escrita como

$$x = a\cosh t \quad \text{e} \quad y = b\,\text{senh}\, t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Também

$$x = -a\cosh t \quad \text{e} \quad y = b\,\text{senh}\, t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

é uma representação paramétrica da hipérbole (17). Apenas que com (20) obtemos somente o ramo direito da hipérbole e com (23), somente o ramo esquerdo.

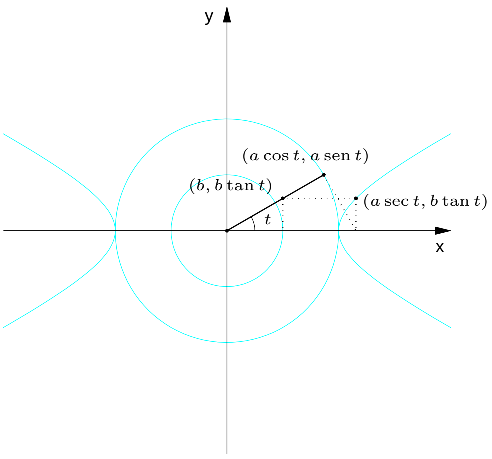

Figura 36: Hipérbole parametrizada usando secante e tangente

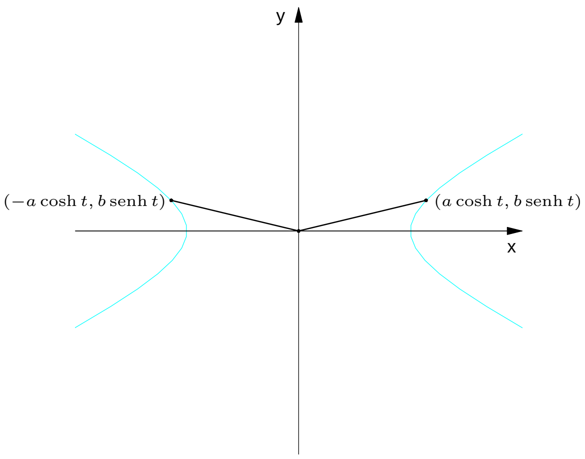

Figura 37: Hipérbole parametrizada usando as funções hiperbólicas

Exemplo 2.8. Vamos mostrar que a parametrização de uma curva em relação a qual sabemos sua equação em coordenadas polares $r = f(\theta)$ pode ser feita da seguinte forma

$$x = f(t)\cos t \quad \text{e} \quad y = f(t)\,\text{sen}\, t. \tag{24}$$

A equação da curva em coordenadas cartesianas é

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = f(\theta(x,y)), & \text{se } f(\theta(x,y)) \geq 0 \\ -\sqrt{x^2+y^2} = f(\theta(x,y)), & \text{se } f(\theta(x,y)) < 0. \end{cases}$$

ou

$$\sqrt{x^2+y^2} = |f(\theta(x,y))|. \tag{25}$$

Para a parametrização (24) temos que

$$\sqrt{x^2+y^2} - |f(\theta(x,y))| = \sqrt{(f(t))^2\cos^2 t + (f(t))^2\,\text{sen}^2\, t} - |f(t)| = 0.$$

O que mostra que (24) é uma parametrização para (25) e portanto para $r = f(\theta)$. Por exemplo,

$$x = \frac{e\cos t}{1 + e\cos t} \quad \text{e} \quad y = \frac{e\,\text{sen}\, t}{1 + e\cos t}$$

é uma parametrização de uma cônica com excentricidade $e > 0$, reta diretriz localizada à direita a uma distância igual a 1 e um dos focos na origem.

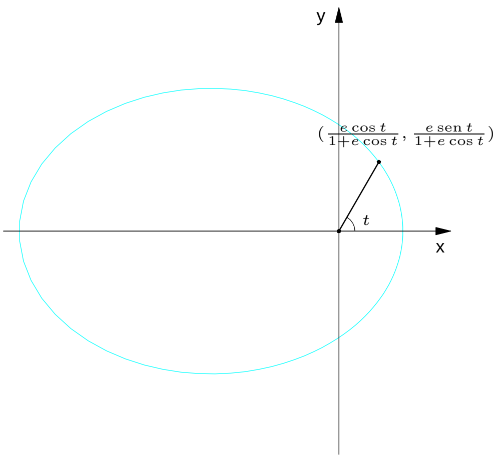

Figura 38: Elipse com foco na origem parametrizada usando a sua fórmula em coordenadas polares

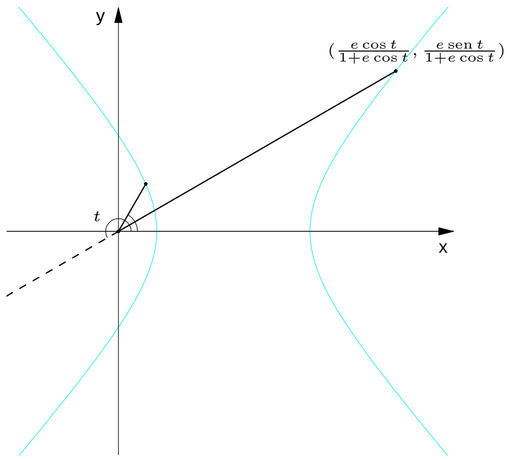

Figura 39: Hipérbole com foco na origem parametrizada usando a sua fórmula em coordenadas polares

Exercícios Numéricos

2.1. Transformar a equação em coordenadas retangulares em uma equação em coordenadas polares:

(a) $x^2 + y^2 = 4$

(b) $x^2 - y^2 = 4$

(c) $x^2 + y^2 - 2y = 0$

(d) $x^2 - 4y - 4 = 0$

2.2. Transformar a equação em coordenadas polares em uma equação em coordenadas retangulares:

(a) $r = \dfrac{2}{1 - 3\cos\theta}$

(b) $r = 4 \operatorname{sen}\theta$

(c) $r = 9\cos\theta$

(d) $r = \dfrac{3}{2 + \operatorname{sen}\theta}$

2.3. Identificar a cônica cuja equação em coordenadas polares é dada. Determine a excentricidade, a equação da diretriz, a distância da diretriz ao foco e as coordenadas polares do(s) vértice(s):

(a) $r = \dfrac{5}{2 - 2\cos\theta}$

(b) $r = \dfrac{6}{3 + \operatorname{sen}\theta}$

(c) $r = \dfrac{3}{2 + 4\cos\theta}$

(d) $r = \dfrac{4}{2 - 3\cos\theta}$

2.4. Determine o raio e e as coordenadas polares do centro da circunferência cuja equação em coordenadas polares é dada:

(a) $r = 4\cos\theta$

(b) $r = -3\operatorname{sen}\theta$

(c) $r = \frac{3}{2}\cos\theta$

(d) $r = -\frac{4}{3}\operatorname{sen}\theta$

2.5. A equação da trajetória de uma partícula lançada do ponto $P_0 = (0, 0)$, com velocidade v_0, fazendo um ângulo α com o eixo $\mathtt{x}$ e sujeita apenas a ação da aceleração da gravidade g é dada por

$$y = (\tan\alpha)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2.$$

Mostre que

$$x = (v_0\cos\alpha)t \quad \text{e} \quad y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \frac{g}{2}t^2$$

são equações paramétricas da trajetória da partícula.

Exercícios Teóricos

2.6. Se o centro de uma circunferência que passa pelo polo é (a, α), mostre que sua equação em coordenadas polares é

$$r = 2a\cos(\theta - \alpha).$$

2.7. Se a cônica de equação $r = \dfrac{de}{1 - e\cos\theta}$ representa uma parábola, determine as coordenadas polares do seu vértice e a equação em coordenadas polares da reta diretriz.

2.8. Se a cônica de equação $r = \dfrac{de}{1 + e\cos\theta}$ representa uma elipse, mostre que o comprimento do seu eixo menor é $\dfrac{2de}{\sqrt{1 - e^2}}$.

2.9. Mostre que a equação em coordenadas polares de uma elipse com um dos focos no polo, que tem eixo maior igual a $2a$ e excentricidade e é

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\theta}.$$

Referências

[1] Howard Anton and Chris Rorres. *Álgebra Linear com Aplicações*. Bookman, São Paulo, 8a. edition, 2000.

[2] Paulo Boulos and Ivan de C. e Oliveira. *Geometria Analítica - um tratamento vetorial*. Mc Graw-Hill, São Paulo, 2a. edition, 1987.

[3] Charles H. Lehmann. *Geometria Analítica*. Editora Globo, Porto Alegre, 1974.

[4] Louis Leithold. *Cálculo com geometria analítica, Vol. 2*. Ed. Harbra Ltda., São Paulo, 3a. edition, 1994.

[5] Reginaldo J. Santos. *Matrizes Vetores e Geometria Analítica*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2001.

[6] James Stewart. *Cálculo, Vol. 2*. Pioneira, São Paulo, 4a. edition, 2001.

[7] Israel Vainsecher. *Notas de Geometria Analítica Elementar*. Departamento de Matemática-UFPe, Recife, 2001.