Decomposição LU

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi
regi@mat.ufmg.br

25 de setembro de 1999

Considere o problema de resolver vários sistemas lineares

$$A\,X = B_1, \quad A\,X = B_2, \quad \ldots \quad A\,X = B_k,$$

com a mesma matriz A, $n \times n$ e invertível. Para resolver este problema podemos calcular a inversa de A, pelo método de Gauss-Jordan e para encontrar as soluções, basta fazer os produtos $A^{-1}B_1, \ldots, A^{-1}B_k$. Uma outra possibilidade, mais econômica, é fazer a decomposição LU de A, ou seja, encontrar duas matrizes L, triangular inferior, e U, triangular superior, tais que $A = LU$. Neste caso, fazendo $U\,X = Y$, vemos que o sistema

$$A\,X = B_i$$

é equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L\,Y & = & B_i \\ U\,X & = & Y \end{array} \right.$$

para $i = 1, \ldots, k$.

1 Caso sem Troca de Linhas

Vamos supor que podemos transformar a matriz A numa matriz U triangular superior, aplicando-se uma seqüência de operações elementares às linhas de A. Além disso, vamos supor que podemos fazer isso apenas usando operações do tipo "somar a uma linha um múltiplo escalar de outra".

Exemplo 1.1. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Primeiro vamos subtrair à 2^{a} linha, 2 vezes a 1^{a}, depois vamos subtrair à 3^{a} linha, -1 vezes a 1^{a}, obtendo

$\boxed{\begin{array}{l} -2\times 1^{\text{a}} \text{ linha} + 2^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha} \\ -1\times 1^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha} \end{array}}$ $\left[\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{array}\right]$

E finalmente vamos subtrair à 3ª linha, -1 vezes a 2ª, obtendo

$\boxed{-1\times 2^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha}}$ $\left[\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = U$

As matrizes elementares correspondentes a estas operações elementares são

$$F_1 = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right], F_2 = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right], F_3 = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Assim,

$$F_3 F_2 F_1 A = U.$$

Multiplicando-se à esquerda pelas inversas das matrizes elementares, obtemos

$$A = F_1^{-1} F_2^{-1} F_3^{-1} U = LU,$$

onde, $L = F_1^{-1} F_2^{-1} F_3^{-1}$.

Sejam $E_1 = \left[\begin{array}{r} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right], E_2 = \left[\begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right]$, $E_3 = \left[\begin{array}{r} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right]$. As matrizes elementares F_i podem ser escritas em termos das matrizes E_i como

$$F_1 = I_3 - 2E_2 E_1^t, F_2 = I_3 + E_3 E_1^t, F_3 = I_3 + E_3 E_2^t$$

e as inversas como

$$F_1^{-1} = I_3 + 2E_2 E_1^t, F_2^{-1} = I_3 - E_3 E_1^t, F_3^{-1} = I_3 - E_3 E_2^t.$$

Assim,

$$\begin{aligned} L &= F_1^{-1} F_2^{-1} F_3^{-1} = (I_3 + 2E_2 E_1^t)(I_3 - E_3 E_1^t)(I_3 - E_3 E_2^t) \\ &= I_3 + 2E_2 E_1^t - E_3 E_1^t - E_3 E_2^t + \ldots \qquad (1) \\ &= \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right], \end{aligned}$$

pois nos outros termos em (1) aparecem produtos da forma $E_i(E_j^t E_{i'})E_{j'}^t = 0$, se $j \neq i'$.

Observe que a matriz L é muito fácil de se obter. Ela é a matriz triangular inferior, com os elementos da diagonal iguais a 1 e abaixo da diagonal, os multiplicadores usados para transformar a matriz A na matriz U, com os sinais trocados.

O que fizemos neste exemplo é válido em geral. Sejam

$$F_{i,j}(\alpha) = \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \cdot \\ \cdot & & 1 & & & & \cdot \\ \cdot & & \vdots & \ddots & & & \cdot \\ \cdot & & \alpha & \dots & 1 & & \cdot \\ \cdot & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} = I_n + \alpha E_i E_j^t,$$

onde $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, E_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ matrizes $n \times 1$. Se

$$F_{n,n-1}(\alpha_{n(n-1)}) \dots F_{2,1}(\alpha_{21}) A = \prod_{j=n-1}^{1} \prod_{i=n}^{j-1} F_{i,j}(\alpha_{ij}) A = U,$$

então

$$A = L\,U,$$

onde

$$\begin{aligned} L &= F_{2,1}^{-1}(\alpha_{21}) \dots F_{n,n-1}^{-1}(\alpha_{n(n-1)}) = \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=j-1}^{n} F_{i,j}^{-1}(\alpha_{ij}) \\ &= \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=j-1}^{n} (I_n - \alpha_{ij} E_i E_j^t) \\ &= I_n - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j-1}^{n} \alpha_{ij} E_i E_j^t + \dots \qquad (2) \\ &= \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -\alpha_{21} & \ddots & & & & & \cdot \\ \cdot & & 1 & & & & \cdot \\ \cdot & & \vdots & \ddots & & & \cdot \\ \cdot & & -\alpha_{ij} & \dots & 1 & & \cdot \\ \cdot & & & & & \ddots & 0 \\ -\alpha_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\alpha_{n(n-1)} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \end{aligned}$$

pois nos outros termos em (2) aparecem produtos da forma $E_i(E_j^t E_{i'})E_{j'}^t = 0$, se $j \neq i'$.

2 Caso com Troca de Linhas

Vamos supor que para transformar a matriz A na matriz U, preciamaos também fazer trocas de linhas. Entretanto, a forma simples com que fizemos a decomposição LU só é possivel se não fizermos troca de linhas. Como podemos resolver este problema? Imagine que soubessemos *a priori* as trocas necessárias para fazermos o pivoteamento. As trocas de linhas são também operações elementares e podem ser descritas por matrizes elementares (obtidas fazendo-se a troca correspondente na matriz identidade). O produto destas matrizes é uma matriz chamada de matriz de permutação. Seja P a matriz correspondente à composição de todas as trocas feitas durante o escalonamento. Então podemos fazer a decomposição LU do produto PA, ou seja,

$$PA = LU$$

e assim multiplicando a equação

$$AX = B$$

por P, ficamos com

$$PAX = PB$$

ou

$$LUX = PB$$

e fazendo $UX = Y$, devemos resolver

$$\begin{cases} L\,Y & = & PB \\ U\,X & = & Y \end{cases}$$

Apesar de não sabermos *a priori* as trocas necessárias, podemos utilizar este procedimento, pois o resultado de trocarmos de posição as linhas no início do processo é o mesmo de irmos trocando, a medida que seja necessário.

3 Número de Operações

Como o tempo que um computador leva para fazer uma soma ou subtração é muito menor do que o tempo que ele leva para fazer um produto ou divisão, vamos considerar somente os produtos e as divisões realizadas.

3.1 No Cálculo da Inversa pelo Método de Gauss-Jordan

Na k-ésima eliminação temos que fazer as seguintes multiplicações e divisões:

- Dividir a k-ésima linha pelo pivô. Para isto é necessário $(n-k)+n$ divisões (já sabemos que o elemento que está na coluna k será igual a 1).
- Zerar a k-ésima coluna. Para isto é necessário, para cada linha, $(n-k)+n$ produtos (já sabemos que os elementos que estão na coluna k serão iguais a zero), vezes o número de linhas a serem afetadas, que é igual a $n-1$ (os elementos da coluna k já sabemos que eles serão iguais a zero). Portanto, são necessários $(n-1)(n-k+n)$ produtos.

No total são feitas

$$\sum_{k=1}^{n} n\left((n-k)+n\right) =$$

$$= n(n+\ldots+1) + n^3 = n\left(\frac{n(n+1)}{2} + n^2\right) =$$

$$= \frac{3n^3+n^2}{2}$$

3.2 Na Decomposição LU

Na k-ésima eliminação temos que fazer as seguintes multiplicações e divisões:

- Vamos deixar a k-ésima linha inalterada, mas para cada linha abaixo do pivô vamos fazer uma divisão para determinar os valores que vamos multiplicar cada linha. Para isto são necessárias $n-k$ divisões.

- Para zerar abaixo do pivô são necessários, para cada linha, $n-k$ produtos (já sabemos que os elementos que estão na coluna k serão iguais a zero), vezes o número de linhas afetadas, que é igual a $n-k$. Portanto, são necessários $(n-k)^2$ produtos.

O número total de operações realizadas é

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+1)$$

fazendo a mudança de variáveis $k' = n-k$, obtemos que o número de operações é igual a

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n^3+6n^2+4n}{6}$$

3.3 Resumo

Número de Operações	
Gauss-Jordan	Decomposição LU
Encontrar A^{-1} $\sum_{k=1}^{n}\{n[(n-k)+n]\} \approx \frac{3n^3}{2}$	Encontrar L e U $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \approx \frac{n^3}{3}$
Multiplicar A^{-1} por B n^2	Resolver $LY = B$ e $UX = Y$ $2\sum_{k=1}^{n} k \approx n^2$

Referências

[1] Stanley I. Grossman. *Elementary Linear Algebra*. Saunders College Publishing, New York, 5a. edition, 1994.

[2] Bernard Kolman. *Introdução à Álgebra Linear*. Prentice Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 6a. edition, 1998.

[3] David C. Lay. *Linear Algebra and its Applications*. Addison-Wesley, Reading, 2a. edition, 1997.

[4] Steven J. Leon. *Linear Algebra with Applications*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 5a. edition, 1998.

[5] Reginaldo J. Santos. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Departamento de Matemática - UFMG, Belo Horizonte, Setembro 1999.