

# Decomposição Primária de Matrizes 3x3

Reginaldo J. Santos

Departamento de Matemática-ICEx  
Universidade Federal de Minas Gerais

<https://regijs.github.io/>

16.6.2026

Seja  $A$  uma matriz  $3 \times 3$ , com somente um autovalor  $\lambda \in \mathbb{R}$  e autoespaço associado de dimensão igual a 1. O seu polinômio característico tem a forma  $p(t) = -(t - \lambda)(t^2 + bt + c)$ , com  $\Delta = b^2 - 4c < 0$ . Neste caso a matriz não tem a forma canônica de Jordan em  $\mathbb{R}^3$ .

Vamos supor que existem matrizes  $P = [V \ W \ U]_{3 \times 3}$  e  $D = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$  tais que  $A = PDP^{-1}$ .

Multiplicando-se  $A = PDP^{-1}$  à direita por  $P$ :

$$AP = PD \Leftrightarrow A[V \ W \ U] = [V \ W \ U] \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow [AV \ AW \ AU] = [\alpha V + \gamma W \ \beta V + \delta W \ \lambda U].$$

Portanto,  $AV = \alpha V + \gamma W$ ,  $AW = \beta V + \delta W$  e  $AU = \lambda U$ .

Ou seja,  $U$  é um autovetor associado a  $\lambda$  e  $V$  e  $W$  são tais que o subespaço  $[V, W]$  é invariante por  $A$ .

Reciprocamente, sejam  $V, W, U$ , tais que

$$AU = \lambda U \tag{1}$$

e  $\{V, W\}$  uma base do subespaço<sup>1</sup>

$$\mathbb{W} = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid (A^2 + bA + cI_3)X = \bar{0}\}.$$

Se  $X \in \mathbb{W}$ , então  $(A^2 + bA + cI_3)X = \bar{0}$ . Logo,  $(A^2 + bA + cI_3)(AX) = A(A^2 + bA + cI_3)X = A\bar{0} = \bar{0}$ , ou seja,  $AX \in \mathbb{W}$ . Portanto, existem  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  tais que

$$AV = \alpha V + \gamma W \quad \text{e} \quad AW = \beta V + \delta W. \tag{2}$$

---

<sup>1</sup>Veja no final deste texto a demonstração de que  $\mathbb{W}$  tem dimensão dois.

Vamos mostrar que  $U, V, W$  são LI. Se

$$xU + yV + zW = \bar{0}, \quad (3)$$

então

$$(A^2 + bA + cI_3)(xU + yV + zW) = \bar{0},$$

Como,  $(A^2 + bA + cI_3)(yV + zW) = \bar{0}$ , então

$$x(A^2 + bA + cI_3)U = \bar{0}.$$

Como  $AU = \lambda U$ , então  $(A^2 + bA + cI_3)U = (\lambda^2 + b\lambda + c)U \neq \bar{0}$  e assim  $x = 0$ . Substituindo-se  $x = 0$  em (3), obtemos

$$yV + zW = \bar{0}.$$

Como  $\{V, W\}$  é uma base do subespaço  $\mathbb{W}$ , então  $y = z = 0$ . Portanto,  $U, V, W$  são LI.

De (1) e (2) temos que

$$[AV \ AW \ AU] = [\alpha V + \gamma W \ \beta V + \delta W \ \lambda U],$$

que pode ser reescrito como

$$A[V \ W \ U] = [V \ W \ U] \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad AP = PD,$$

em que  $D = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$  e  $P = [V \ W \ U]_{3 \times 3}$ .

Como  $\{V, W, U\}$  é LI, então  $P$  é invertível e multiplicando-se  $AP = PD$  à direita por  $P^{-1}$  obtemos

$$A = PDP^{-1}.$$

**Exemplo 1** (Exercício 1 da Seção 6.4 de [1]). Seja  $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}$ .

O polinômio característico de  $A$  é

$$\begin{aligned}
 p(t) = \det(A - tI_3) &= \det \begin{bmatrix} 6-t & -3 & -2 \\ 4 & -t-1 & -2 \\ 10 & -5 & -t-3 \end{bmatrix} && C_1 \leftrightarrow C_3 \\
 &= -\det \begin{bmatrix} -2 & -3 & 6-t \\ -2 & -t-1 & 4 \\ -t-3 & -5 & 10 \end{bmatrix} && L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\
 &= -\det \begin{bmatrix} -2 & -3 & 6-t \\ 0 & 2-t & t-2 \\ -t-3 & -5 & 10 \end{bmatrix} \\
 &= -(t-2) \det \begin{bmatrix} -2 & -3 & 6-t \\ 0 & -1 & 1 \\ -t-3 & -5 & 10 \end{bmatrix} && C_2 \rightarrow C_2 + C_3 \\
 &= -(t-2) \det \begin{bmatrix} -2 & 3-t & 6-t \\ 0 & 0 & 1 \\ -t-3 & 5 & 10 \end{bmatrix} \\
 &= (t-2) \det \begin{bmatrix} -2 & 3-t \\ -t-3 & 5 \end{bmatrix} = -(t-2)(t^2 + 1)
 \end{aligned}$$

Vamos encontrar a solução de  $(A - 2I_3)X = \bar{0}$ .

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 10 & -5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & -5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow 5L_1 - 2L_3} \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, a solução do sistema  $(A - 2I_3)X = \bar{0}$  é

$$\{X \in \mathbb{R}^3 \mid X = (\alpha, 0, 2\alpha).\}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 10 & -10 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^2 + I_3 = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, a solução do sistema  $(A^2 + I_3)X = \bar{0}$  é

$$\{X \in \mathbb{R}^3 | X = (\alpha, \alpha, \beta) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 0, 1)\}.$$

Sejam  $V = (1, 1, 0)$  e  $W = (0, 0, 1)$ .

$$AV = (3, 3, 5) = 3V + 5W \quad \text{e} \quad AW = (-2, -2, -3) = -2V - 3W.$$

Logo, as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

são tais que  $A = PDP^{-1}$ .

## Demonstração de que $\dim(\mathbb{W}) = 2$

Se  $Y \in \mathcal{J}(A^2 + bA + cI_3)$ , então existe  $X \in \mathbb{R}^3$  tal que

$$(A^2 + bA + cI_3)X = Y.$$

Aplicando-se  $A - \lambda I_3$ , obtemos pelo Teorema de Cayley-Hamilton, que

$$\bar{0} = -p(A)X = (A - \lambda I_3)Y.$$

Ou seja,  $Y \in \mathcal{N}(A - \lambda I_3)$ . Logo,

$$\mathcal{J}(A^2 + bA + cI_3) \subseteq \mathcal{N}(A - \lambda I_3).$$

Assim, como a multiplicidade geométrica é menor ou igual a multiplicidade algébrica, então

$$\dim(\mathcal{J}(A^2 + bA + cI_3)) \leq \dim(\mathcal{N}(A - \lambda I_3)) = 1.$$

Logo, pelo Teorema da dimensão do núcleo e da Imagem, temos que

$$\dim(\mathbb{W}) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathcal{J}(A^2 + bA + cI_3)) \geq 2.$$

Além disso,  $\mathcal{N}(A - \lambda I_3) \cap \mathbb{W} = \{\bar{0}\}$ , pois se  $AX = \lambda X$ , então  $(A^2 + bA + cI_3)X = (\lambda^2 + b\lambda + c)X \neq \bar{0}$ , se  $X \neq \bar{0}$ . Como

$$\dim(\mathbb{W} + \mathcal{N}(A - \lambda I_3)) = \dim(\mathbb{W}) + \dim(\mathcal{N}(A - \lambda I_3)) - \dim(\mathcal{N}(A - \lambda I_3) \cap \mathbb{W}),$$

então

$$\dim(\mathbb{W}) \leq \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathcal{N}(A - \lambda I_3)) = 2.$$

Portanto,

$$\dim(\mathbb{W}) = 2.$$

## Agradecimentos

Agradecimentos especiais a Joana Darc A. S. da Cruz pelas frutíferas discussões.

## Referências Bibliográficas

- [1] Kenneth Hoffman and Ray Kunze. *Álgebra Linear*. Livros Técnicos e Científicos Ed. S.A., Rio de Janeiro, 3a. edition, 1979.
- [2] Reginaldo J. Santos. *Álgebra Linear e Aplicações*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2013.