O Determinante como uma Forma Multilinear Alternada

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

21 de maio de 2004

Uma função f do conjunto das matrizes $n \times n$ em $\mathbb{R}$ é chamada **forma multilinear** ou n-**linear** se para qualquer matriz A, $n \times n$, e escalares α e β,

$$f\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ \alpha X + \beta Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \alpha f \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ X \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \beta f \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix},$$

onde $X = [\, x_1 \ldots x_n \,]$ e $Y = [\, y_1 \ldots y_n \,]$.

Teorema 1. *Se f é uma forma multilinear, então para qualquer matriz A, $n \times n$,*

$$f\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \ldots \sum_{k_n=1}^{n} a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n} f \begin{bmatrix} E_{k_1}^t \\ \vdots \\ E_{k_n}^t \end{bmatrix}$$

Demonstração. Cada linha i pode ser escrita como

$$A_i = \sum_{k_i=1}^{n} a_{ik_i} E_{k_i}^t.$$

Assim, aplicando-se a multilinearidade segue que

$$
\begin{aligned}
f\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} &= f\begin{bmatrix} \sum_{k_1=1}^{n} a_{1k_1} E_{k_1}^t \\ \vdots \\ \sum_{k_n=1}^{n} a_{nk_n} E_{k_n}^t \end{bmatrix} = \sum_{k_1=1}^{n} a_{1k_1} f\begin{bmatrix} E_{k_1}^t \\ \sum_{k_2=1}^{n} a_{2k_2} E_{k_2=1}^t \\ \vdots \\ \sum_{k_n=1}^{n} a_{nk_n} E_{k_n}^t \end{bmatrix} = \\
&= \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \ldots \sum_{k_n=1}^{n} a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n} f\begin{bmatrix} E_{k_1}^t \\ \vdots \\ E_{k_n}^t \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$\square$

Assim uma forma multilinear fica inteiramente determinada se conhecemos os n^n valores $f\begin{bmatrix} E_{k_1}^t \\ \vdots \\ E_{k_n}^t \end{bmatrix}$, para $k_1 = 1, \ldots, n, \ldots k_n = 1, \ldots, n$.

Dizemos que uma forma multilinear é **alternada** se

$$
f\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = 0, \quad \text{sempre que } A_k = A_l.
$$

Proposição 2. *Uma forma multilinear é alternada se, e somente se, ela é* ***anti-simétrica****, isto é, para qualquer matriz A, $n \times n$,*

$$
f\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ X \\ \vdots \\ Y \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = -f\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ Y \\ \vdots \\ X \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}, \quad \textit{para } X = [\, x_1 \ldots x_n \,] \textit{ e } Y = [\, y_1 \ldots y_n \,].
$$

Demonstração. Se f é alternada, então

$$
\begin{aligned}
0 &= f\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ X+Y \\ \vdots \\ X+Y \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = f\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ X \\ \vdots \\ X \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + f\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ X \\ \vdots \\ Y \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + f\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ Y \\ \vdots \\ X \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + f\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ Y \\ \vdots \\ Y \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \\
&= 0 + f\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ X \\ \vdots \\ Y \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + f\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ Y \\ \vdots \\ X \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + 0,
\end{aligned}
$$

de onde segue que f é anti-simétrica. Deixamos para o leitor como exercício mostrar que se f é anti-simétrica, então f é alternada. $\square$

Como conseqüencia imédiata desta proposição temos o seguinte resultado.

Corolário 3. *Se f é uma forma multilinear alternada, então para toda permutação σ dos inteiros $1, \ldots, n$ e toda matriz A, $n \times n$,*

$$f\begin{bmatrix} A_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ A_{\sigma(n)} \end{bmatrix} = \varepsilon_\sigma f\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix},$$

onde ε_σ é o sinal da permutação σ, ou seja, ε_σ é igual a $+1$ se σ é o resultado de um número par de transposições e é igual a -1 se é o resultado de um número ímpar de transposições.

Assim, toda forma multilinear alternada é determinada pelo seu valor na matriz identidade I_n, como mostra o próximo resultado.

Teorema 4. *Se f é uma forma multilinear alternada, então para qualquer matriz A, $n \times n$,*

$$f \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} f(I_n)$$

Demonstração. Sendo f multilinear temos que

$$f \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \ldots \sum_{k_n=1}^{n} a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n} f \begin{bmatrix} E_{k_1}^t \\ \vdots \\ E_{k_n}^t \end{bmatrix}$$

Neste somatório são nulas todas as parcelas em que há repetições dos índices $k_1, \ldots, k_n$, restando apenas aquelas em que

$$(k_1, k_2, \ldots, k_n) = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$$

é uma permutação dos inteiros. Neste caso,

$$a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n} = a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

e a parcela correspondente

$$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} f \begin{bmatrix} E_{\sigma(1)}^t \\ \vdots \\ E_{\sigma(n)}^t \end{bmatrix} = \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} f \begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ E_n^t \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$f \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} f(I_n),$$

o somatório é extendido a todas as permutações σ dos inteiros $1, \ldots, n$. $\square$

Assim, toda forma multilinear alternada é determinada pelo seu valor na matriz identidade I_n. Como já mostramos que o determinante é uma forma multilinear alternada que vale 1 na matriz identidade, temos a seguinte caracterização do determinante.

Corolário 5. *O determinante é a única forma multilinear alternada que vale* 1 *na matriz identidade e além disso para qualquer matriz* A*,* $n \times n$*,*

$$\det(A) = \sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}.$$

Referências

[1] Kenneth Hoffman and Ray Kunze. *Álgebra Linear*. Livros Técnicos e Científicos Ed. S.A., Rio de Janeiro, 3a. edition, 1979.

[2] Serge Lang. *Linear Algebra*. Springer Verlag, New York, 3a. edition, 1987.

[3] Elon L. Lima. *Álgebra Linear*. IMPA, Rio de Janeiro, 2a. edition, 1996.

[4] Seymour Lipschutz. *Álgebra Linear*. McGraw-Hill, São Paulo, 3a. edition, 1994.

[5] Reginaldo J. Santos. *Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2003.