UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
GEOMETRIA ANALÍTICA E ÁLGEBRA LINEAR - 19 de novembro de 2005
Prof. Reginaldo J. Santos

Exercícios Complementares sobre Cônicas

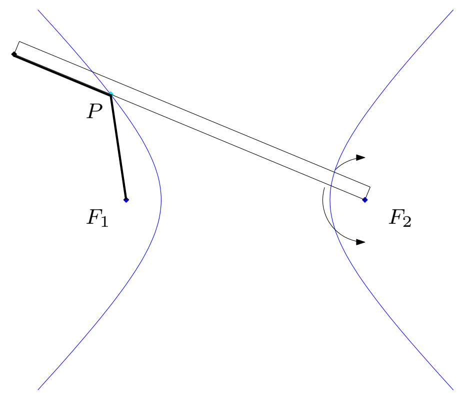

Figura 1: Hipérbole conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $|\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 2a$

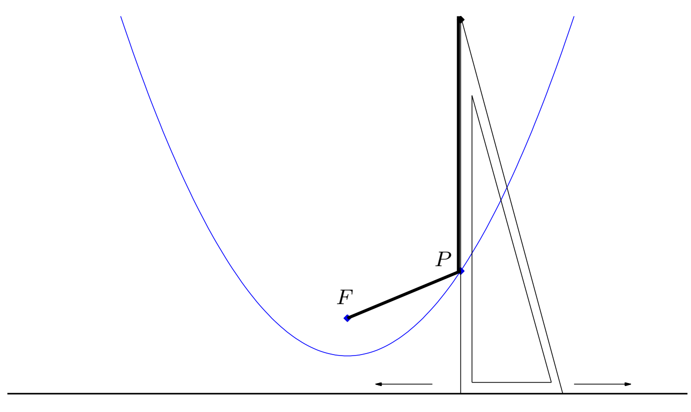

Figura 2: Parábola conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, r)$

1. (a) Verifique que com o procedimento abaixo realmente desenhamos uma parte de um ramo de uma hipérbole. Fixamos uma extremidade de uma régua em um dos focos, fixamos uma extremidade de um barbante (de comprimento igual ao comprimento da régua menos $2a$) na outra ponta da régua e a outra extremidade do barbante no outro foco. Esticamos o barbante com uma caneta de forma que ela fique encostada na régua. Girando-se a régua em torno do foco no qual ela foi fixada, mantendo o barbante esticado com a caneta encostada na régua, uma parte de um ramo da hipérbole será traçada .

(b) Verifique que com o procedimento abaixo realmente desenhamos uma parte de um ramo de uma parábola. Colocamos um esquadro com um lado cateto encostado na reta diretriz, fixamos uma extremidade de um barbante (de comprimento igual ao lado cateto do esquadro perpendicular à reta diretriz) no foco, a outra extremidade na ponta do esquadro oposta ao lado que está encostado na reta diretriz. Esticamos o barbante com a caneta de forma que ela fique encostada no lado do esquadro perpendicular à reta diretriz. Deslizando-se o esquadro na direção da reta diretriz mantendo o lado encostado nela uma parte da parábola é traçada.

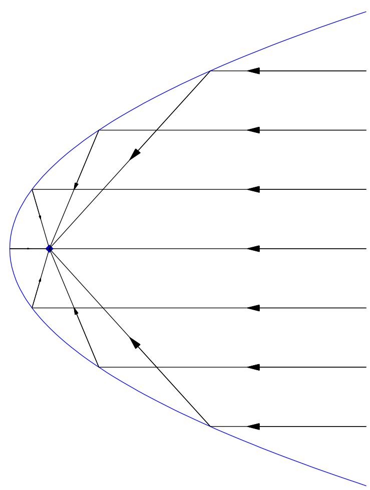

Figura 3: Parábola refletindo para o foco os raios que incidem paralelos ao eixo de simetria.

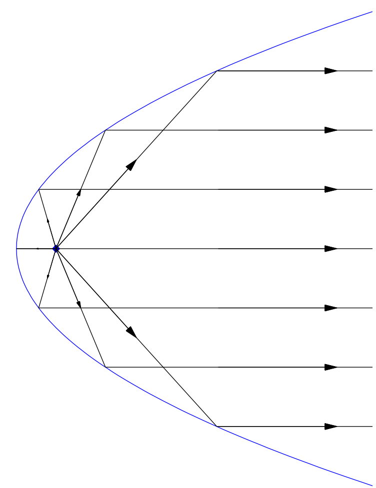

Figura 4: Parábola refletindo na direção do seu eixo de simetria os raios originários do foco.

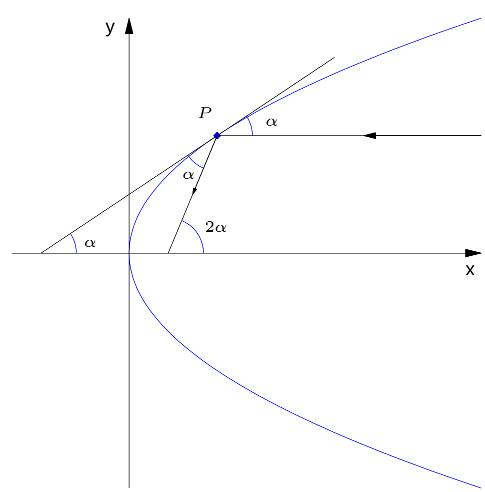

Figura 5: Parábola refletindo para o foco os raios que incidem paralelos ao eixo de simetria.

2. Mostre que um espelho parabólico reflete na direção do foco os raios que incidem paralelos ao seu eixo de simetria seguindo os seguintes passos:

   (a) Considere a parábola $y^2 = 4px$. Usando o fato de que a inclinação da reta tangente à parabola no ponto $P = (\frac{y_0^2}{4p}, y_0)$ é $\tan(\alpha) = \frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y_0}$. Mostre que se o raio incidente tem equação $y = y_0$, então a equação do raio refletido que passa por $P = (\frac{y_0^2}{4p}, y_0)$ é

   $$y - y_0 = \frac{4py_0}{y_0^2 - 4p^2}(x - \frac{y_0^2}{4p}).$$

   Use o fato de que $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

   (b) Mostre que o raio refletido intercepta o eixo x em $x = p$.

3. Mostre que a interseção de um cone circular com plano que não passa pelo seu vértice é uma cônica seguindo os seguintes passos:

   (a) Considere dois sistemas de coordenadas $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e $\mathcal{S} = \{O, \vec{i}, U_2, U_3\}$, em que $U_2 = (0, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ e $U_3 = (0, -\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$, ou seja, o sistema $\mathcal{S}$ é obtido do sistema $\mathcal{R}$ por uma rotação do ângulo θ em torno do eixo x. Mostre que é válida a seguinte relação entre as coordenadas, (x', y', z'), em relação ao sistema $\mathcal{S}$ e (x, y, z), em relação ao sistema $\mathcal{R}$

   $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ (\cos\theta)y + (\operatorname{sen}\theta)z \\ -(\operatorname{sen}\theta)y + (\cos\theta)z \end{bmatrix}.$$

   (b) Mostre que o cone circular de equação

   $$x'^2 + y'^2 = z'^2$$

   no sistema $\mathcal{S}$ tem equação

   $$x^2 + (\cos 2\theta)y^2 + (2\operatorname{sen} 2\theta)yz - (\cos 2\theta)z^2 = 0$$

   no sistema $\mathcal{R}$.

   (c) Mostre que a interseção do cone com o plano $z = 1$ é a cônica no plano de equação

   $$x^2 + (\cos 2\theta)y^2 + (2\operatorname{sen} 2\theta)y = \cos 2\theta$$

   (d) Mostre que se $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$, então a cônica é a parábola no plano com equação

   $$x^2 \pm 2y = 0.$$

   (e) Mostre que se $\theta \neq \pm\frac{\pi}{4}$, então a cônica no plano tem equação

   $$\frac{x^2}{\sec^2 2\theta} + \frac{(y + \tan 2\theta)^2}{\sec\theta} = 1,$$

   que é uma elipse se $|\theta| < \frac{\pi}{4}$ e uma hipérbole se $\frac{\pi}{4} < |\theta| \leq \frac{\pi}{2}$.

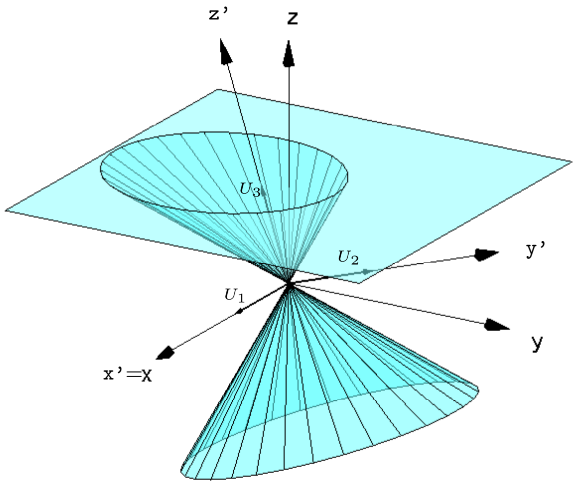

Figura 6: Elipse interseção do cone circular com um plano

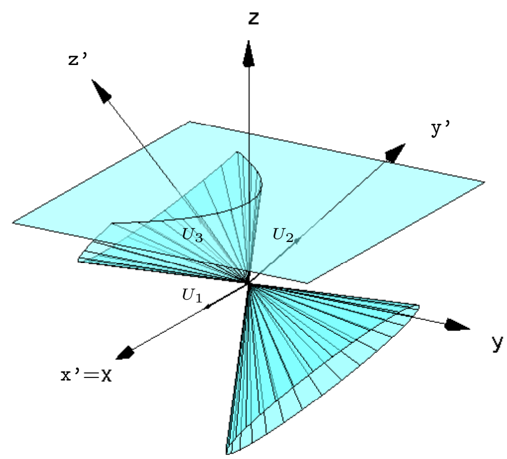

Figura 7: Parábola interseção do cone circular com um plano

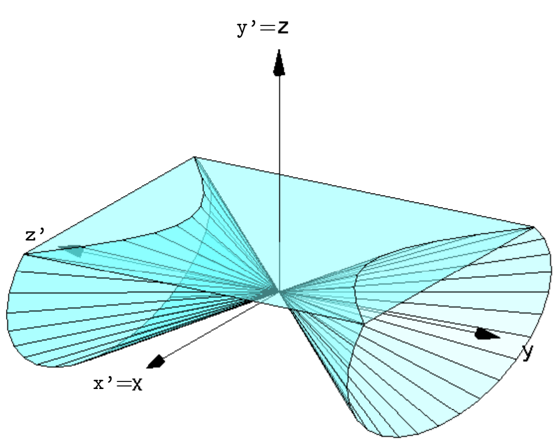

Figura 8: Hipérbole interseção do cone circular com um plano