UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
GEOMETRIA ANALÍTICA E ÁLGEBRA LINEAR - 21 de agosto de 2013
Prof. Reginaldo J. Santos

Exercícios Complementares sobre Retas e Planos

1. Determine as equações paramétricas da reta interseção dos planos:

   (a) $x + 2y - 3z - 4 = 0$ e $x - 4y + 2z + 1 = 0$;

   (b) $x - y = 0$ e $x + z = 0$.

2. Achar as equações da reta que intercepta as retas r_1 e r_2 e é perpendicular a ambas.

   (a)
$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t, \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \\ z = 4t \end{cases}$$
   e
$$r_2 : \; x + 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3}.$$

   (b)
$$r_1 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + 3t, \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \\ z = 4t \end{cases}$$
   e
$$r_2 : \; x = \frac{y-4}{2} = \frac{z-3}{3}.$$

Solução

1. (a)
```
>> N1=[1,2,-3]; N2=[1,-4,2]; V=pv(N1,N2)
V =     -8     -5     -6
```
Os planos se interceptam segundo uma reta cujo vetor diretor é $V = (-8,-5,-6)$. Fazendo $y = 0$ nas equações obtemos um sistema de duas equações e duas incógnitas cuja solução é $x = 1, z = -1$. Assim, $P_0 = (1,0,-1)$ é um ponto da reta e as equações paramétricas da reta são

$$\begin{cases} x &= 1 - 8t \\ y &= -5t, \qquad \text{para } t \in \mathbb{R} \\ z &= -1 - 6t \end{cases}$$

(b)
```
>>  N1=[1,-1,0]; N2=[1,0,1]; V=pv(N1,N2)
V =     -1     -1      1
```
Os planos se interceptam segundo uma reta cujo vetor diretor é $V = (-1,-1,1)$. Claramente $P_0 = (0,0,0)$ é um ponto da reta e as equações paramétricas da reta são

$$\begin{cases} x &= -t \\ y &= -t, \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \\ z &= t \end{cases}$$

2. (a) Um ponto qualquer da reta r_1 é descrito por $P_{r_1} = (-1+t, 2+3t, 4t)$ e um ponto qualquer da reta r_2 é da forma $P_{r_2} = (-1+s, 1+2s, -2+3s)$. Aqui é necessário o uso de um parâmetro diferente para a reta r_2. O vetor

$$\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (s-t, -1+2s-3t, -2+3s-4t)$$

"liga" um ponto qualquer de r_1 a um ponto qualquer de r_2. Vamos determinar t e s tais que o vetor $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}$ seja perpendicular ao vetor diretor $V_1 = (1,3,4)$ de r_1 e ao vetor diretor $V_2 = (1,2,3)$ de r_2, ou seja, temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} \cdot V_1 &= -11+19s-26t &= 0 \\ \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} \cdot V_2 &= -8+14s-19t &= 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema é $t = -2/3$, $s = -1/3$. Logo $P_{r_1} = (-5/3, 0, -8/3)$, $P_{r_2} = (-4/3, 1/3, -3)$, $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (1/3, 1/3, -1/3)$ e $V_3 = (1,1,-1)$ é um vetor diretor da reta procurada. Assim as equações paramétricas da reta procurada são

$$r_3 : \begin{cases} x = -5/3 + t \\ y = t, \\ z = -8/3 - t \end{cases} \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

(b) Um ponto qualquer da reta r_1 é descrito por $P_{r_1} = (-1 + t, 2 + 3t, 4t)$ e um ponto qualquer da reta r_2 é da forma $P_{r_2} = (s, 4+2s, 3+3s)$. Aqui é necessário o uso de um parâmetro diferente para a reta r_2. O vetor

$$\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (1 + s - t, 2 + 2s - 3t, 3 + 3s - 4t)$$

"liga" um ponto qualquer de r_1 a um ponto qualquer de r_2. Vamos determinar t e s tais que o vetor $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}$ seja perpendicular ao vetor diretor $V_1 = (1, 3, 4)$ de r_1 e ao vetor diretor $V_2 = (1, 2, 3)$ de r_2, ou seja, temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} \cdot V_1 = 19 + 19s - 26t = 0 \\ \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} \cdot V_2 = 14 + 14s - 19t = 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema é $t = 0$, $s = -1$. Logo $P_{r_1} = (-1, 2, 0)$, $P_{r_2} = (-1, 2, 0)$ e $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (0, 0, 0)$. Neste caso o vetor $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}$ não pode ser o vetor diretor da reta procurada. Vamos tomar como vetor diretor da reta procurada o vetor $V_3 = V_1 \times V_2 = (1, 1, -1)$.

Assim as equações paramétricas da reta procurada são

$$r_3 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t, \\ z = -t \end{cases} \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$