UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
GEOMETRIA ANALÍTICA E ÁLGEBRA LINEAR - 7 de abril de 2006
Prof. Reginaldo J. Santos

Exercícios Complementares de Matrizes e Sistemas Lineares

1. Quais condições uma matriz quadrada deve satisfazer para que ela possa ser uma matriz de transição.

2. Considere a seguinte matriz de transição

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Se o vetor de estado num instante é

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

ou seja, se a população está igualmente distribuída nos três estados, determine a distribuição da população nos três estados após uma unidade de tempo.

3. Para a matriz do exercício anterior determine qual distribuição inicial da população entre os três estados permanece inalterada, geração após geração. Ou seja, determine um vetor de estado P tal que

$$TP = P$$

Solução

1. (a) A soma dos elementos de cada coluna da matriz é igual a 1.

   (b) Os elementos da matriz são não negativos.

2.
```
>> T=sym([1/2,1/2,0;1/3,1/3,1/3;0,1/2,1/2]')
>> P=sym([1/3;1/3;1/3])
>> T*P
[ 5/18]
[  4/9]
[ 5/18]
```

3.
$$TX = X \quad \Leftrightarrow \quad (T - I_3)X = \bar{0}$$

```
>> T-eye(3)
[ -1/2,  1/3,    0]
[  1/2, -2/3,  1/2]
[    0,  1/3, -1/2]
>> escalona(T-eye(3))
[    1,    0,   -1]
[    0,    1, -3/2]
[    0,    0,    0]
```

assim o sistema $(T - I_3)X = \bar{0}$ é equivalente ao sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & - & z & = & 0 \\ & y & - & \frac{3}{2}z & = & 0 \end{array} \right.$$

Seja $z = \alpha$. Então $y = \frac{3}{2}\alpha$ e $x = \alpha$. Assim, a solução geral do sistema é

$$X = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Tomando a solução tal que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ obtemos que se a população inicial for distribuída de forma que $p_1 = 2/7$ da população esteja no estado 1, $p_2 = 3/7$ da população esteja no estado 2 e $p_3 = 2/7$, esteja no estado 3, então esta distribuição permanecerá constante geração após geração.