UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
GEOMETRIA ANALÍTICA E ÁLGEBRA LINEAR - 6 de outubro de 2005
Prof. Reginaldo J. Santos

Exercícios Complementares sobre Vetores

1. Determine o ponto C tal que $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AB}$ sendo $A = (0, -2)$ e $B = (1, 0)$.

2. Determine a equação da reta no plano que é perpendicular ao vetor $N = (2, 3)$ e passa pelo ponto $P_0 = (-1, 1)$.

3. Verifique se é um paralelogramo o quadrilátero de vértices (não necessariamente consecutivos)

   (a) $A = (4, -1, 1)$, $B = (9, -4, 2)$, $C = (4, 3, 4)$ e $D = (4, -21, -14)$

   (b) $A = (4, -1, 1)$, $B = (9, -4, 2)$, $C = (4, 3, 4)$ e $D = (9, 0, 5)$

4. Quais dos seguintes vetores são paralelos $U = (6, -4, -2)$, $V = (-9, 6, 3)$, $W = (15, -10, 5)$.

5. Mostre que em um triângulo isósceles a mediana relativa à base é perpendicular à base.

6. Mostre que o ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto.

   Sugestão para os próximos 2 exercícios: Considere o paralelogramo $ABCD$. Seja $U = \overrightarrow{AB}$ e $V = \overrightarrow{AD}$. Observe que as diagonais do paralelogramo são $U + V$ e $U - V$.

7. Mostre que se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares então ele é um losango.

8. Mostre que se as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo comprimento então ele é um retângulo.

Solução

1. ```
   >> OA=[0,-2];OB=[1,0];
   >> AB=OB-OA
   AB = 1      2
   >> AC=2*AB
   AC = 2      4
   >> OC=OA+AC
   OC = 2      2
   ```
   $C = (2, 2)$.

2. Um ponto $P = (x, y)$ pertence a reta se, e somente se,

   $$\overrightarrow{P_0P} \cdot N = 0.$$

   ou seja, se, e somente se,

   $$(x + 1, y - 1) \cdot (2, 3) = 0$$

   ou

   $$2x + 3y - 1 = 0$$

3. Para ser um paralelogramo um dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ tem que ser igual a soma dos outros dois.

   (a)
   ```
   >> OA=[4,-1,1];OB=[9,-4,2];
   >> OC=[4,3,4];OD=[4,-21,-14];
   >> AC=OC-OA
   AC = 0      4      3
   >> AB=OB-OA
   AB = 5     -3      1
   >> AD=OD-OA
   AD = 0    -20    -15
   ```
   Não é um paralelogramo.

   (b) Somente o vértice D é diferente.
   ```
   >> OD=[9,0,5];
   >> AD=OD-OA
   AD = 5      1      4
   ```
   É um paralelogramo de vértices consecutivos A, B, D e C.
   ```

4. Resolvendo a equação vetorial $U = xV$ obtemos que

$$U = (6, -4, -2) = -\frac{2}{3}(-9, 6, 3) = -\frac{2}{3}V.$$

Fazendo o mesmo para $U = xW$ obtemos que não existe solução, logo somente os vetores U e V são paralelos.

5. Seja AB a base do triângulo isosceles e M o seu ponto médio. Vamos mostrar que $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \cdot (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) \\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} - || \overrightarrow{CA} ||^2 + || \overrightarrow{CB} ||^2 - \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}) = 0
\end{aligned}$$

6. Seja AB o lado situado no diâmetro da circunferência e O seu centro. Vamos mostrar que $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB}) \\
&= || \overrightarrow{CO} ||^2 + \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CO} - || \overrightarrow{OB} ||^2 = 0
\end{aligned}$$

7. Se as diagonais são perpendiculares, então $(U + V) \cdot (U - V) = 0$. Mas,

$$(U + V) \cdot (U - V) = ||U||^2 - ||V||^2.$$

Então, os lados adjacentes têm o mesmo comprimento e como ele é um paralelogramos todos os lados têm o mesmo comprimento.

8. Vamos mostrar que $U \cdot V = 0$.

$$||U + V||^2 = ||U||^2 + 2U \cdot V + ||V||^2$$

$$||U - V||^2 = ||U||^2 - 2U \cdot V + ||V||^2$$

Assim $||U + V|| = ||U - V||$ implica que $U \cdot V = 0$.