Cadeias de Markov

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

22 de março de 2006

Vamos supor que uma população é dividida em três estados (por exemplo: ricos, classe média e pobres) e que em cada unidade de tempo a probabilidade de mudança de um estado para outro seja constante no tempo, só dependa dos estados. Este processo é chamado **cadeia de Markov**.

Seja t_{ij} a probabilidade de mudança do estado j para o estado i em uma unidade de tempo (geração). Cuidado com a ordem dos índices. A matriz

$$T \;=\; \begin{array}{cc} \begin{matrix} \;1 & \;\;2 & \;\;3 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array}$$

é chamada **matriz de transição**. A distribuição da população inicial entre os três estados pode ser descrita pela seguinte matriz:

$$P_0 = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{está no estado 1} \\ \text{está no estado 2} \\ \text{está no estado 3} \end{matrix} \end{array}$$

A matriz P_0 caracteriza a distribuição inicial da população entre os três estados e é chamada **vetor de estado**. Após uma unidade de tempo a população estará dividida entre os três estados da seguinte forma

$$P_1 = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} t_{11}p_1 + t_{12}p_2 + t_{13}p_3 \\ t_{21}p_1 + t_{22}p_2 + t_{23}p_3 \\ t_{31}p_1 + t_{32}p_2 + t_{33}p_3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{estará no estado 1} \\ \text{estará no estado 2} \\ \text{estará no estado 3} \end{matrix} \end{array}$$

Lembre-se que t_{ij} é a probabilidade de mudança do estado j para o estado i. Assim a matriz de estado após uma unidade de tempo é dada pelo produto de matrizes:

$$P_1 = TP_0.$$

1 Matrizes

Exemplo 1. Vamos considerar a matriz de transição

$$T = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array} \tag{1}$$

e o vetor de estados inicial

$$P_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{está no estado 1} \\ \text{está no estado 2} \\ \text{está no estado 3} \end{array} \tag{2}$$

que representa uma população dividida de forma que 1/3 da população está em cada estado.

Após uma unidade de tempo a matriz de estado será dada por

$$P_1 = TP_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Como estamos assumindo que em cada unidade de tempo a matriz de transição é a mesma, então após k unidades de tempo a população estará dividida entre os três estados segundo a matriz de estado

$$P_k = TP_{k-1} = T^2 P_{k-2} = \cdots = T^k P_0$$

Assim a matriz T^k dá a transição entre k unidades de tempo.

2 Sistemas Lineares

Exemplo 2. Vamos tomar a matriz de transição do Exemplo 1 na página 2.

$$T \;=\; \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ & \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Vamos descobrir qual distribuição inicial da população entre os três estados é tal que, geração após geração, permanece inalterada. Ou seja, vamos determinar P tal que

$$TP = P \quad \text{ou} \quad TP = I_3P \quad \text{ou} \quad (T - I_3)P = \bar{0}.$$

Assim precisamos resolver o sistema linear homogêneo

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\frac{1}{2}x & + & \frac{1}{4}y & & & = & 0 \\ \frac{1}{2}x & - & \frac{1}{2}y & + & \frac{1}{2}z & = & 0 \\ & & \frac{1}{4}y & - & \frac{1}{2}z & = & 0 \end{array} \right.$$

cuja matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

1ª eliminação:

$$\boxed{-2\times 1^{a}\ \text{linha} \longrightarrow 2^{a}\ \text{linha}} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$$\boxed{-\tfrac{1}{2}\times 1^{a}\ \text{linha} + 2^{a}\ \text{linha} \longrightarrow 2^{a}\ \text{linha}} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

2ª eliminação:

$$\boxed{-4\times 2^{a}\ \text{linha} \longrightarrow 2^{a}\ \text{linha}} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{r} \frac{1}{2}\times 2^{\underline{a}} \text{ linha} + 1^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 1^{\underline{a}} \text{ linha} \\ -\frac{1}{4}\times 2^{\underline{a}} \text{ linha} + 3^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\underline{a}} \text{ linha} \end{array}} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Portanto o sistema dado é equivalente ao sistema seguinte

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & - & z & = 0 \\ & y & - & 2z & = 0 \end{array} \right.$$

Seja $z = \alpha$. Então $y = 2\alpha$ e $x = \alpha$. Assim, a solução geral do sistema é

$$X = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Tomando a solução tal que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ obtemos que se a população inicial for distribuída de forma que $p_1 = 1/4$ da população esteja no estado 1, $p_2 = 1/2$ da população esteja no estado 2 e $p_3 = 1/4$, esteja no estado 3, então esta distribuição permanecerá constante geração após geração.

3 Diagonalização

Exemplo 3. Vamos tomar a matriz de transição do Exemplo 1 na página 2.

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} ① & ② & ③ \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

Vamos calcular potências k de T, para k um inteiro positivo qualquer. Para isto vamos diagonalizar a matriz T. Para isso precisamos determinar seus os autovalores e autovetores. Para esta matriz o polinômio característico é

$$\begin{aligned} p(t) &= \det(T - t\,I_3) = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - t & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - t & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - t \end{bmatrix} \\ &= (\frac{1}{2} - t)\det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - t & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - t \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} - t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\frac{1}{2}-t)\left[(\frac{1}{2}-t)^2-\frac{1}{8}\right]-\frac{1}{8}(\frac{1}{2}-t)\\
&= -t^3+\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}t = t(-t^2+\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}) = -t(t-1)(t-\frac{1}{2})
\end{aligned}
$$

Portanto os autovalores de T são $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1/2$ e $\lambda_3 = 1$. Agora, vamos determinar os autovetores associados aos autovalores λ_1, λ_2 e λ_3. Para isto vamos resolver os sistemas $(T-\lambda_1 I_3)X = \bar{0}$, $(T-\lambda_2 I_3)X = \bar{0}$ e $(T-\lambda_3 I_3)X = \bar{0}$. Como

$$
(T-\lambda_1 I_3)X = TX = \bar{0} \quad \text{é} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

A forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema é

$$
\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

Assim, a solução geral do sistema $(T-\lambda_1 I_3)X = \bar{0}$ é

$$
\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, -2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},
$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_1 = 0$ acrescentado o vetor nulo. O conjunto $\{V_1 = (1,-2,1)\}$ é uma base para $\mathbb{W}_1$, pois como $(\alpha,-2\alpha,\alpha) = \alpha(1,-2,1)$, V_1 gera $\mathbb{W}_1$ e um vetor não nulo é L.I.

Com relação ao autovalor $\lambda_2 = 1/2$, o sistema $(T-\lambda_2 I_3)X = \bar{0}$ é

$$
\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

A forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema é

$$
\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

Assim, a solução geral do sistema $(T-\lambda_2 I_3)X = \bar{0}$ é

$$
\mathbb{W}_2 = \{(\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.
$$

O conjunto $\{V_2 = (1,0,1)\}$ é uma base para $\mathbb{W}_2$, pois como $(\alpha,0,\alpha) = \alpha(1,0,1)$, V_3 gera $\mathbb{W}_2$ e um vetor não nulo é L.I.

Com relação ao autovalor $\lambda_3 = 1$, o sistema $(T - \lambda_3 I_3)X = \bar{0}$ é

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema é

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Assim, a solução geral do sistema $(T - \lambda_3 I_3)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_3 = \{(\alpha, 2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_3 = 1$ acrescentado o vetor nulo. O conjunto $\{V_1 = (1,2,1)\}$ é uma base para $\mathbb{W}_1$, pois como $(\alpha, 2\alpha, \alpha) = \alpha(1,2,1)$, V_1 gera $\mathbb{W}_1$ e um vetor não nulo é L.I.

Como V_1, V_2 e V_3 são autovetores associados a λ_1, λ_2 e λ_3, respectivamente, então pela os autovetores juntos V_1, V_2 e V_3 são L.I. Assim, a matriz A é diagonalizável e as matrizes

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q = [\, V_1 \; V_2 \; V_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$D = Q^{-1}TQ \quad \text{ou} \quad T = QDQ^{-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} T^k &= QD^kQ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + (\frac{1}{2})^{k+1} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - (\frac{1}{2})^{k+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} - (\frac{1}{2})^{k+1} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + (\frac{1}{2})^{k+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esta é a matriz que dá a transição entre k unidades de tempo (gerações).

Referências

[1] Reginaldo J. Santos. *Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2003.