Mudança de Coordenadas

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi
regi@mat.ufmg.br

13 de dezembro de 2001

1 Rotação e Translação

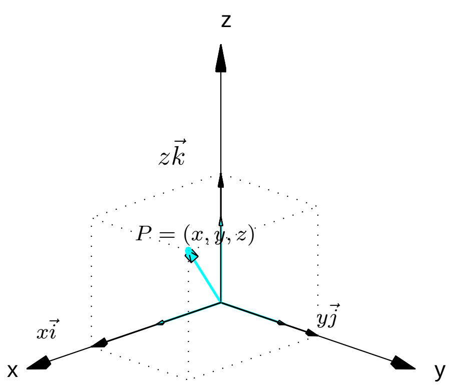


Figura 1: $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

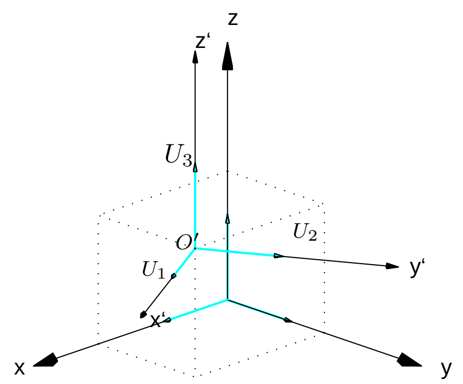


Figura 2: Dois sistemas de coordenadas $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e $\{O', U_1, U_2, U_3\}$

Se as coordenadas de um ponto P no espaço são (x, y, z), então as componentes do vetor $\overrightarrow{OP}$ também são (x, y, z) e então podemos escrever

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) \\ &= x(1, 0, 0) + y(0, y, 0) + z(0, 0, 1) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \end{aligned}$$

em que $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Ou seja, as coordenadas de um ponto P são iguais aos escalares que aparecem ao escrevermos $\overrightarrow{OP}$ como uma combinação linear dos vetores canônicos. Assim, o ponto $O = (0, 0, 0)$ e os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ determinam um sistema de coordenadas (cartesiano), $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Para resolver alguns problemas geométricos é necessário usarmos um segundo sistema de coordenadas determinado por uma origem O' e por vetores U_1, U_2 e U_3 unitários e mutuamente ortogonais.[1] Por exemplo, se $O' = (2, 3/2, 3/2)$, $U_1 = (\sqrt{3}/2, 1/2, 0)$, $U_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2, 0)$ e $U_3 = (0, 0, 1) = \vec{k}$, então $\{O', U_1, U_2, U_3\}$ determina um novo sistema de coordenadas: aquele com origem no ponto O', cujos eixos x', y' e z' são retas que passam por O' orientadas com os sentidos e direções de U_1, U_2 e U_3, respectivamente.

As coordenadas de um ponto P no sistema de coordenadas $\{O', U_1, U_2, U_3\}$ é definido como sendo os escalares que aparecem ao escrevermos $\overrightarrow{O'P}$ como combinação linear dos vetores U_1, U_2 e U_3, ou seja, se

$$\overrightarrow{O'P} = x'U_1 + y'U_2 + z'U_3,$$

então as coordenadas de P no sistema $\{O', U_1, U_2, U_3\}$ são dadas por

$$[P]_{\{O', U_1, U_2, U_3\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Vamos considerar inicialmente o caso em que $O = O'$. Assim, se $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$, então $x'U_1 + y'U_2 + z'U_3 = \overrightarrow{OP}$ pode ser escrito como

$$[\, U_1 \; U_2 \; U_3 \,] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Multiplicando-se à esquerda pela transposta da matriz $Q = [\, U_1 \, U_2 \, U_3 \,]$, obtemos

$$\begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \\ U_3^t \end{bmatrix} [\, U_1 \; U_2 \; U_3 \,] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \\ U_3^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Mas, como U_1, U_2 e U_3 são unitários e mutuamente ortogonais, então

$$Q^tQ = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \\ U_3^t \end{bmatrix} [\, U_1 \; U_2 \; U_3 \,] = \begin{bmatrix} U_1^tU_1 & U_1^tU_2 & U_1^tU_3 \\ U_2^tU_1 & U_2^tU_2 & U_2^tU_3 \\ U_3^tU_1 & U_3^tU_2 & U_3^tU_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \cdot U_1 & U_1 \cdot U_2 & U_1 \cdot U_3 \\ U_2 \cdot U_1 & U_2 \cdot U_2 & U_2 \cdot U_3 \\ U_3 \cdot U_1 & U_3 \cdot U_2 & U_3 \cdot U_3 \end{bmatrix} = I_3$$

Assim, a matriz $Q = [\, U_1 \, U_2 \, U_3 \,]$ é invertível e $Q^{-1} = Q^t$. Desta forma as coordenadas de um ponto P no espaço em relação ao sistema $\{O, U_1, U_2, U_3\}$ estão bem definidas, ou seja, x', y' e z' estão unicamente determinados e são dados por

$$[P]_{\{O, U_1, U_2, U_3\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = Q^t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Q^t [P]_{\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}}.$$

Também no plano temos o mesmo tipo de situação que é tratada de forma inteiramente análoga. As coordenadas de um ponto P no plano em relação a um sistema de coordenadas

[1]Um sistema de coordenadas podemo definir um sistema de coordenadas pode ser determinado por um ponto O' e três vetores V_1, V_2 e V_3 não coplanares que não necessariamente são ortogonais e unitários (veja o Exercício 1.6 na página 8).

$\{O', U_1, U_2\}$, em que U_1 e U_2 são vetores unitários e ortogonais, é definido como sendo os escalares que aparecem ao escrevermos $\overrightarrow{O'P}$ como combinação linear de U_1 e U_2, ou seja, se

$$\overrightarrow{O'P} = x'U_1 + y'U_2,$$

então as coordenadas de P no sistema $\{O', U_1, U_2\}$ são dadas por

$$[P]_{\{O', U_1, U_2\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Vamos considerar, também no plano, inicialmente o caso em que $O = O'$. Assim, se $\overrightarrow{OP} = (x, y)$, então $x'U_1 + y'U_2 = \overrightarrow{OP}$ pode ser escrito como

$$[\, U_1 \; U_2 \,] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Multiplicando-se à esquerda pela transposta da matriz $Q = [\, U_1 \, U_2 \,]$, obtemos

$$\begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \end{bmatrix} [\, U_1 \; U_2 \,] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Novamente, como U_1 e U_2 são unitários e mutuamente ortogonais, então

$$Q^tQ = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \end{bmatrix} [\, U_1 \; U_2 \,] = \begin{bmatrix} U_1^tU_1 & U_1^tU_2 \\ U_2^tU_1 & U_2^tU_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \cdot U_1 & U_1 \cdot U_2 \\ U_2 \cdot U_1 & U_2 \cdot U_2 \end{bmatrix} = I_2$$

Assim, a matriz $Q = [\, U_1 \, U_2 \,]$ é invertível e $Q^{-1} = Q^t$. Desta forma as coordenadas de um ponto P no plano em relação a um sistema de coordenadas $\{O, U_1, U_2\}$ estão bem definidas, ou seja, x' e y' estão unicamente determinados e são dados por

$$[P]_{\{O, U_1, U_2\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q^t [P]_{\{O, E_1, E_2\}},$$

em que $E_1 = (1, 0)$ e $E_2 = (0, 1)$. Observe que, tanto no caso do plano quanto no caso do espaço, a matriz Q satisfaz, $Q^{-1} = Q^t$. Uma matriz que satisfaz esta propriedade é chamada **matriz ortogonal**.

Exemplo 1.1. Considere o sistema de coordenadas no plano em que $O' = O$ e $U_1 = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ e $U_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$. Se $P = (2, 4)$, vamos determinar as coordenadas de P em relação ao novo sistema de coordenadas. Para isto temos que encontrar x' e y' tais que

$$x'U_1 + y'U_2 = \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP},$$

ou

$$x'(\sqrt{3}/2, 1/2) + y'(-1/2, \sqrt{3}/2) = (2, 4)$$

A equação acima é equivalente ao sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcrl} (\sqrt{3}/2)x' & - & (1/2)y' & = 2 \\ (1/2)x' & + & (\sqrt{3}/2)y' & = 4 \end{array} \right.$$

ou

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ou ainda,

$$Q \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

em que $Q = [\, U_1 \; U_2 \,]$ com U_1 e U_2 escritos como matrizes colunas. Como

$$Q^t Q = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = I_2,$$

então as coordenadas de P em relação ao novo sistema de coordenadas são dadas por

$$[P]_{\{O,U_1,U2\}} = Q^t \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}-1 \end{bmatrix}.$$

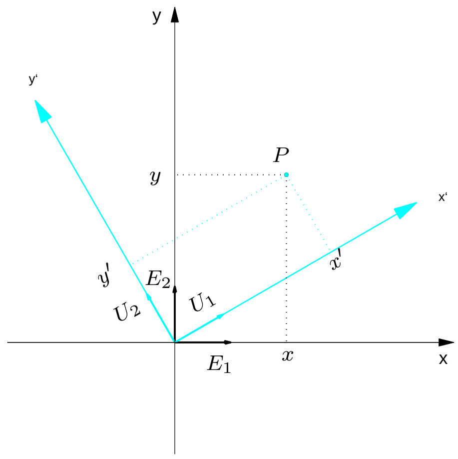


Figura 3: Coordenadas de um ponto P em dois sistemas

Exemplo 1.2. Considere o mesmo sistema de coordenadas do exemplo anterior, mas agora seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer do plano. Vamos determinar as coordenadas de P em relação ao novo sistema de coordenadas. Para isto temos que encontrar x' e y' tais que

$$x' U_1 + y' U_2 = \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP},$$

ou

$$x'(\sqrt{3}/2, 1/2) + y'(-1/2, \sqrt{3}/2) = (x, y)$$

A equação acima é equivalente ao sistema linear nas variáveis x' e y'

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

ou

$$Q\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

em que $Q = [\, U_1 \; U_2 \,]$ com U_1 e U_2 escritos como matrizes colunas. Como $Q^tQ = I_2$, então as coordenadas de P em relação ao novo sistema de coordenadas são dadas por

$$[P]_{\{O,U_1,U2\}} = Q^t\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sqrt{3}\,x + y)/2 \\ (-x + \sqrt{3}\,y)/2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.3. Vamos agora considerar um problema inverso àqueles apresentados nos exemplos anteriores. Suponha que sejam válidas as seguintes equações

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' & + & \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' & - & \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases},$$

ou equivalentemente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

entre as coordenadas $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ de um ponto P em relação a um sistema de coordenadas $\{O, U_1, U_2\}$ e as coordenadas de P, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, em relação ao sistema de coordenadas original $\{O, E_1 = (1, 0), E_2 = (0, 1)\}$. Queremos determinar quais são os vetores U_1 e U_2.

Os vetores U_1 e U_2 da nova base possuem coordenadas $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, respectivamente, em relação ao novo sistema de coordenadas, $\{O, U_1, U_2\}$. Pois, $U_1 = 1\,U_1 + 0\,U_2$ e $U_2 = 0\,U_1 + 1\,U_2$. Queremos saber quais as coordenadas destes vetores em relação ao sistema de coordenadas original, $\{O, E_1 = (1, 0), E_2 = (0, 1)\}$. Logo,

$$\begin{aligned} U_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\ U_2 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ou seja, U_1 e U_2 são as colunas da matriz $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$.

1.1 Rotação

Suponha que o novo sistema de coordenadas $\{O, U_1, U_2\}$ seja obtido do sistema original $\{O, E_1 = (1, 0), E_2 = (0, 1)\}$ por uma rotação de um ângulo θ. Observando a Figura 4, obtemos

$$\begin{aligned} U_1 &= (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \\ U_2 &= (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \end{aligned}$$

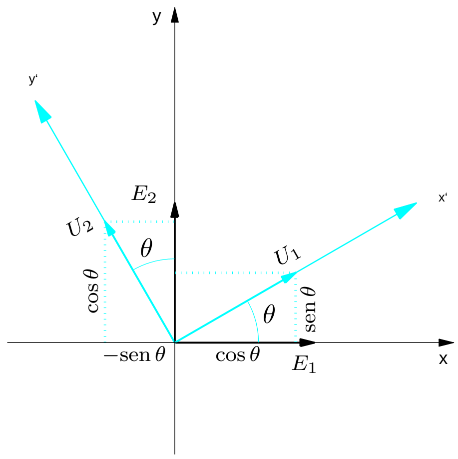


Figura 4: Rotação de um ângulo θ

seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer do plano. Vamos determinar as coordenadas de P em relação ao novo sistema de coordenadas. Para isto temos que encontrar x' e y' tais que

$$x'U_1 + y'U_2 = \overrightarrow{OP}\ .$$

A equação acima é equivalente ao sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcl}(\cos\theta)x' & - & (\operatorname{sen}\theta)y' = x\\ (\operatorname{sen}\theta)x' & + & (\cos\theta)y' = y\end{array}\right. \tag{1}$$

ou

$$R_\theta X = P,$$

em que $R_\theta = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$. A solução é dada por

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} = R_\theta^{-1}P = R_\theta^t P = \begin{bmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}.$$

O sistema de coordenadas que aparece nos dois primeiros exemplos desta seção podem ser obtidos por uma rotação de um ângulo $\theta = \pi/6$ em relação ao sistema original.

A matriz R_θ é chamada **matriz de rotação**.

1.2 Translação

Vamos considerar, agora, o caso em que $O' \neq O$, ou seja, em que ocorre uma **translação** dos eixos coordenados.

Observando a Figura 5, obtemos

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}\ . \tag{2}$$

Assim, se $\overrightarrow{OO'} = (h, k)$, então

$$\overrightarrow{O'P} = (x', y') = (x, y) - (h, k) = (x - h, y - k)$$

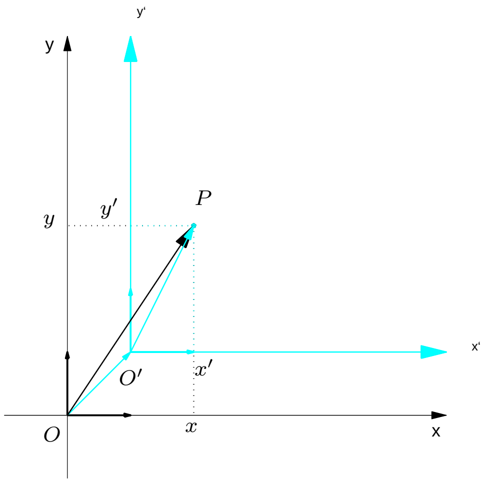


Figura 5: Coordenadas de um ponto P em dois sistemas (translação)

Logo, as coordenadas de P em relação ao novo sistema são dadas por

$$[P]_{\{O',E_1,E_2\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-h \\ y-k \end{bmatrix}. \tag{3}$$

O eixo x′ tem equação $y' = 0$, ou seja, $y = k$ e o eixo y′, $x' = 0$, ou seja, $x = h$.

Exercícios Numéricos

1.1. Encontre as coordenadas do ponto P com relação ao sistema de coordenadas $\mathcal{S}$, nos seguintes casos:

(a) $\mathcal{S} = \{O, (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$ e $P = (1, 3)$;

(b) $\mathcal{S} = \{O, (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (0, 0, 1), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)\}$ e $P = (2, -1, 2)$;

1.2. Encontre o ponto P, se as coordenadas de P em relação ao sistema de coordenadas $\mathcal{S}$, $[P]_{\mathcal{S}}$, são:

(a) $[P]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, em que $\mathcal{S} = \{O, (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$.

(b) $[P]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, em que $\mathcal{S} = \{O, (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (1, 0, 0), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$;

1.3. Sejam $[P]_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ as coordenadas de um ponto P em relação ao sistema de coordenadas $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e $[P]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$, em relação ao sistema de coordenadas $\mathcal{S} = \{O, U_1, U_2, U_3\}$. Suponha que temos a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Quais são os vetores U_1, U_2 e U_3?

1.4. Determine qual a rotação do plano em que as coordenadas do ponto $P = (\sqrt{3}, 1)$ são $\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix}$.

Exercícios Teóricos

1.5. Mostre que $R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1 + \theta_2}$.

1.6. Podemos definir coordenadas de pontos no espaço em relação a um sistema de coordenadas definido por um ponto O' e três vetores não coplanares V_1, V_2 e V_3 da mesma forma como fizemos quando os vetores são unitários e mutuamente ortogonais. As coordenadas de um ponto P no sistema de coordenadas $\{O', V_1, V_2, V_3\}$ é definido como sendo os escalares que aparecem ao escrevermos $\overrightarrow{O'P}$ como combinação linear dos vetores V_1, V_2 e V_3, ou seja, se

$$\overrightarrow{O'P} = x'V_1 + y'V_2 + z'V_3,$$

então as coordenadas de P no sistema $\{O', V_1, V_2, V_3\}$ são dadas por

$$[P]_{\{O',V_1,V_2,V_3\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Assim, se $\overrightarrow{O'P}= (x, y, z)$, então $x'V_1 + y'V_2 + z'V_3 =\overrightarrow{O'P}$ pode ser escrito como

$$[\, V_1 \; V_2 \; V_3 \,] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que a matriz $Q = [\, V_1 \, V_2 \, V_3 \,]$ é invertível.

(b) Mostre que as coordenadas de um ponto P no espaço em relação ao sistema $\{O', V_1, V_2, V_3\}$ estão bem definidas, ou seja, x', y' e z' estão unicamente determinados e são dados por

$$[P]_{\{O',V_1,V_2,V_3\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Q^{-1}[P]_{\{O',\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}}.$$

2 Identificação de Cônicas

Vamos determinar um ângulo θ tal que uma rotação de θ elimina o termo xy na equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{4}$$

transformando-a em

$$a'x'^2 + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0. \tag{5}$$

Ou seja, fazendo a mudança de coordenadas em (4) dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \tag{6}$$

para um ângulo θ adequado, obtemos a equação (5).

A equação (4) pode ser escrita na forma

$$X^tAX + K\,X + f = 0, \tag{7}$$

em que $A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Fazendo a mudança de coordenadas dada por (6) (ou seja, $X = R_\theta X'$, em que $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$) em (7) obtemos a equação

$$X'^tBX' + K'\,X' + f = 0,$$

em que $B = \begin{bmatrix} a' & b'/2 \\ b'/2 & c' \end{bmatrix} = R_\theta^t A R_\theta$ e $K' = \begin{bmatrix} d' & e' \end{bmatrix} = KR_\theta$. Agora, como a inversa de R_θ é R_θ^t, então a matriz identidade $I_2 = R_\theta^t R_\theta$ e daí podemos deduzir que

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I_2) &= \det(R_\theta^t A R_\theta - \lambda I_2) = \det(R_\theta^t A R_\theta - \lambda R_\theta^t R_\theta) \\ &= \det(R_\theta^t (A - \lambda I_2) R_\theta) = \det(R_\theta^t)\det(A - \lambda I_2)\det(R_\theta) = \det(A - \lambda I_2). \end{aligned}$$

Assim, escolhido θ de forma que $b' = 0$,[2] obtemos que

$$\det(A - \lambda I_2) = \det(B - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} a' - \lambda & 0 \\ 0 & c' - \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - a')(\lambda - c').$$

Logo, os coeficientes a' e c' são as raízes da equação de 2º grau

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b/2 \\ b/2 & c - \lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{8}$$

Vamos, agora, determinar o ângulo θ. Observe que a matriz R_θ é tal que

$$B = R_\theta^t A R_\theta.$$

Multiplicando-se à esquerda pela matriz R_θ, obtemos

$$R_\theta B = AR_\theta.$$

[2]Deixamos como exercício a verificação de que sempre existe um ângulo θ tal que a mudança de coordenadas dada por $X = R_\theta X'$ é tal que $b' = 0$

Por um lado,

$$AR_\theta = A\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} & A\begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

por outro lado

$$R_\theta B = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} & c'\begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Como $R_\theta B = AR_\theta$, então segue das das duas últimas equações acima que $U_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$ é tal que

$$AU_1 = a'U_1$$

Mas, esta equação pode ser escrita como

$$AU_1 = a'I_2U_1$$

ou

$$(A - a'I_2)U_1 = \bar{0}.$$

Logo, U_1 é uma solução de norma igual a 1 do sistema linear

$$(A - a'I_2)X = \bar{0}$$

e $U_2 = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$ é obtido de U_1 trocando-se as componentes de posição e depois o sinal da 1ª componente.

Portanto, com a mudança de coordenadas dada por $X = R_\theta X'$, em que $R_\theta = [\ U_1\ U_2\ ]$, a equação (4) se transforma em (5). Os vetores U_1 e U_2 dão a direção e o sentido dos novos eixos `x'` e `y'`.

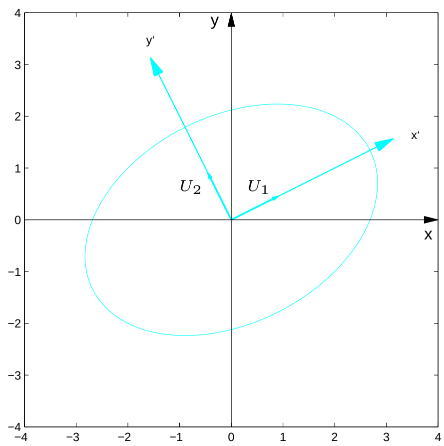


Figura 6: Elipse do Exemplo 2.1

Vamos resumir no próximo resultado o que acabamos de provar.

Teorema 2.1. *Considere a equação*

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \tag{9}$$

com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, sendo a, b e c não simultaneamente nulos. Então por uma rotação do sistema de coordenadas, ou seja, por um mudança de coordenadas da forma

$$X = R_\theta X',$$

em que $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ a equação (9) pode sempre ser transformada em

$$a'x'^2 + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0,$$

em que a', c' são raízes de

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a-\lambda & b/2 \\ b/2 & c-\lambda \end{bmatrix}.$$

Mais ainda, $U_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$ é uma solução de norma igual a 1 do sistema linear

$$\begin{bmatrix} a-a' & b/2 \\ b/2 & c-a' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.1. Vamos eliminar o termo xy na equação

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0 \tag{10}$$

através de uma rotação. Esta equação pode ser escrita da forma

$$X^t AX - 36 = 0,$$

em que $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$. Pelo que vimos, a' e c' são as raízes da equação

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0.$$

Assim, podemos tomar $a' = 4$ e $c' = 9$. Para determinarmos os vetores U_1 e U_2 e por conseguinte o ângulo θ temos que resolver o sistema linear

$$(A - 4I_2)X = \bar{0}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que tem solução geral

$$\mathbb{W}_1 = \{(2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(2\alpha, \alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/\sqrt{5}$, então podemos tomar os vetores

$$\begin{aligned} U_1 &= (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}) \\ U_2 &= (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) \end{aligned}$$

para caracterizar os novos eixos. Portanto a mudança de coordenadas dada pela rotação de $\theta = \arccos(2/\sqrt{5})$ aplicada na equação (10) fornece a equação

$$4x'^2 + 9y'^2 = 36,$$

que é a equação de uma elipse.

Para fazer o esboço do gráfico, em primeiro lugar temos traçar os eixos x′ e y′. O eixo x′ passa pela origem, é paralelo e possui o mesmo sentido do vetor U_1 e o eixo y′ passa pela origem, é paralelo e possui o mesmo sentido que U_2 (Figura 6).

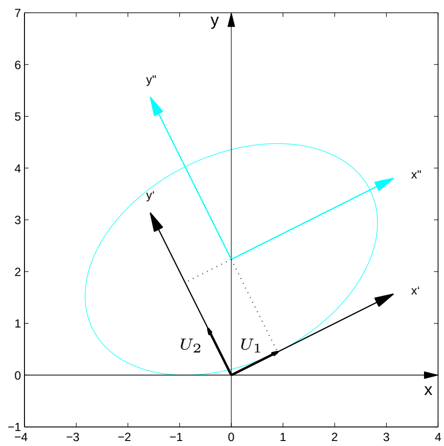


Figura 7: Elipse do Exemplo 2.2

Exemplo 2.2. Considere a cônica cuja equação é dada por

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x - \frac{80}{\sqrt{5}}y + 4 = 0. \tag{11}$$

Vamos eliminar o termo xy através de uma rotação. Os coeficientes a, b e c são os mesmos do exemplo anterior. Pelo exemplo anterior, $a' = 4$ e $c' = 9$ e os vetores U_1 e U_2 que dão a direção e o sentido dos novos eixos são dados por

$$\begin{aligned} U_1 &= (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}) \\ U_2 &= (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) \end{aligned}$$

O coeficiente $f' = f$ e os coeficientes d' e e' são dados por

$$K' = \begin{bmatrix} d' & e' \end{bmatrix} = KR_\theta = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} R_\theta = \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -36 \end{bmatrix}.$$

Portanto a mudança de coordenadas dada pela rotação de $\theta = \arccos(2/\sqrt{5})$ aplicada na equação (11) fornece a equação

$$4x'^2 + 9y'^2 - 8x' - 36y' + 4 = 0.$$

Ou ainda,

$$4(x'^2 - 2x') + 9(y'^2 - 4y') + 4 = 0$$

Completando os quadrados, obtemos

$$4[(x'^2 - 2x' + 1) - 1] + 9[(y'^2 - 4y' + 4) - 4] + 4 = 0$$

ou

$$4(x' - 1)^2 + 9(y' - 2)^2 - 36 = 0.$$

Fazendo mais uma mudança de variáveis

$$x'' = x' - 1 \text{ e} \quad (12)$$
$$y'' = y' - 2 \quad (13)$$

obtemos

$$4x''^2 + 9y''^2 - 36 = 0$$

ou

$$\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1$$

que é a equação de uma elipse cujo esboço é mostrado na Figura 7. Para fazer o esboço do gráfico, em primeiro lugar temos que traçar os eixos x″ e y″, que por sua vez são translações dos eixos x′ e y′. O eixo x′ tem a direção e o sentido do vetor U_1. O eixo y′ tem a direção e o sentido do vetor U_2. O eixo x″ tem equação $y'' = 0$. Usando a equação (12) obtemos $y' = 2$. O eixo y″ tem equação $x'' = 0$. Usando a equação (13) obtemos $x' = 1$.

Deixamos como exercício para o leitor a demonstração do seguinte resultado que classifica o conjunto solução de todas as equações de segundo grau em duas variáveis.

Teorema 2.2. *Seja $\mathcal{C}$ o conjunto dos pontos do plano que satisfazem a equação*

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, sendo a, b e c não simultaneamente nulos. Sejam a' e c' raízes de

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b/2 \\ b/2 & c - \lambda \end{bmatrix}.$$

(a) O produto $a'c' = ac - b^2/4$.

(b) Se $a'c' > 0$, então $\mathcal{C}$ é uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio.

(c) Se $a'c' < 0$, então $\mathcal{C}$ é uma hipérbole, ou um par de retas concorrentes.

(d) Se $a'c' = 0$, então $\mathcal{C}$ é uma parábola, um par de retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio.

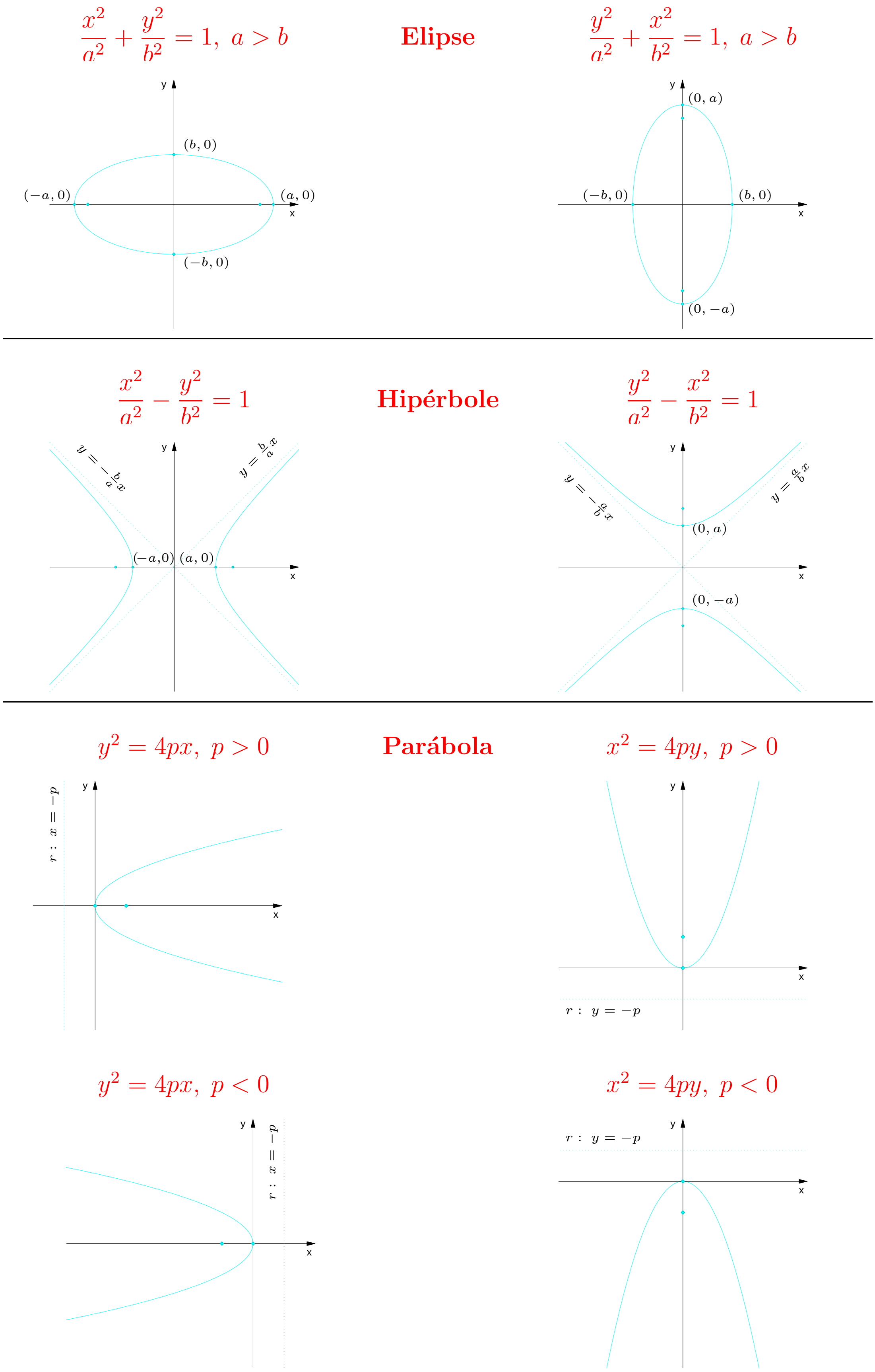


Figura 8: Cônicas não degeneradas com equações na forma padrão

Exercícios Numéricos

Identifique a cônica, ache a equação no último sistema de coordenadas utilizado e faça um esboço do gráfico.

2.1. $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 30$;

2.2. $3x^2 - 8xy - 12y^2 + 81 = 0$;

2.3. $2x^2 - 4xy - y^2 = -24$;

2.4. $21x^2 + 6xy + 13y^2 - 132 = 0$;

2.5. $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0$;

2.6. $9x^2 + y^2 + 6xy - 10\sqrt{10}x + 10\sqrt{10}y + 90 = 0$;

2.7. $5x^2 + 5y^2 - 6xy - 30\sqrt{2}x + 18\sqrt{2}y + 82 = 0$;

2.8. $5x^2 + 12xy - 12\sqrt{13}x = 36$;

2.9. $6x^2 + 9y^2 - 4xy - 4\sqrt{5}x - 18\sqrt{5}y = 5$;

2.10. $x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy + 6x = 0$;

2.11. $8x^2 + 8y^2 - 16xy + 33\sqrt{2}x - 31\sqrt{2}y + 70 = 0$;

Exercícios usando o MATLAB

Comandos do pacote GAAL:

`>> subst(expr,[x;y],[a;b])` substitui na expressão `expr` as variáveis `x,y` por `a,b`, respectivamente.

`>> elipse(a,b)` desenha a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

`>> elipse(a,b,[U1 U2])` desenha a elipse $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> elipse(a,b,[U1 U2],X0)` desenha a elipse $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperbx(a,b)` desenha a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

`>> hiperbx(a,b,[U1 U2])` desenha a hipérbole $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> hiperbx(a,b,[U1 U2],X0)` desenha a hipérbole $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperby(a,b)` desenha a hipérbole $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

`>> hiperby(a,b,[U1 U2])` desenha a hipérbole $\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> hiperby(a,b,[U1 U2],X0)` desenha a hipérbole $\frac{y''^2}{a^2} - \frac{x''^2}{b^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> parabx(p)` desenha a parábola $y^2 = 4px$.

`>> parabx(p,[U1 U2])` desenha a parábola $y'^2 = 4px'$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> parabx(p,[U1 U2],X0)` desenha a parábola $y''^2 = 4px''$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e por `X0`.

`>> paraby(p)` desenha a parábola $x^2 = 4py$.

`>> paraby(p,[U1 U2])` desenha a parábola $x'^2 = 4py'$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> paraby(p,[U1 U2],X0)` desenha a parábola $x''^2 = 4py''$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e por `X0`.

2.12. Use o MATLAB para resolver os **Exercícios Numéricos**

Exercícios Teóricos

2.13. Considere o polinômio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$, em que $A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que $p(\lambda)$ tem somente raízes reais.

(b) Mostre que se $b \neq 0$, então as raízes são distintas, ou seja, $a' \neq c'$.

(c) Sejam a' e c' raízes distintas de $p(\lambda)$. Mostre que se X_1 é solução de $(A - a'I_2)X = \bar{0}$ e X_2 é solução de $(A - c'I_2)X = \bar{0}$, então X_1 e X_2 são ortogonais. (Sugestão: Mostre que $a'X_1 \cdot X_2 = c'X_1 \cdot X_2$)

(d) Mostre que se $X = (x, y)$ é ortogonal a $V = (v_1, v_2)$ com $||X|| = ||V||$, então $X = (-v_2, v_1)$ ou $X = (v_2, -v_1)$.

(e) Mostre que sempre existe um ângulo θ tal que $R_\theta^t A R_\theta = \begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{bmatrix}$ e portanto tal que a mudança de coordenadas dada por $X = QX'$ transforma (4) em (5 na página 10.

2.14. Seja $\mathcal{C}$ o conjunto dos pontos do plano que satisfazem a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, sendo a, b e c não simultaneamente nulos. Sejam a' e c' raízes de

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b/2 \\ b/2 & c - \lambda \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que $a'c' = ac - b^2/4 = p(0) = \det \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$.

(b) Mostre que se $a'c' > 0$, então $\mathcal{C}$ é uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio.

(c) Mostre que se $a'c' < 0$, então $\mathcal{C}$ é uma hipérbole, ou um par de retas concorrentes.

(d) Mostre que se $a'c' = 0$, então $\mathcal{C}$ é uma parábola, um par de retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio.

3 Identificação de Quádricas

Vamos determinar uma mudança de coordenadas que elimina os termos xy, xz e yz na equação

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0, \tag{14}$$

transformando-a em

$$a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + g'x' + h'y' + i'z + j = 0. \tag{15}$$

Ou seja, fazendo uma mudança de coordenadas em (14) dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \tag{16}$$

em que $Q = [\, U_1 \; U_2 \; U_3 \,]$, para vetores U_1, U_2 e U_3 unitários e ortogonais, escolhidos adequadamente, obtemos a equação (15).

A equação (14) pode ser escrita na forma

$$X^t AX + K\,X + j = 0, \tag{17}$$

em que $A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Fazendo a mudança de coordenadas dada por (16) (ou seja, $X = QX'$, em que $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$) em (17) obtemos a equação

$$X'^t BX' + K'\,X' + j = 0,$$

em que $B = \begin{bmatrix} a' & d'/2 & e'/2 \\ d'/2 & b' & f'/2 \\ e'/2 & f'/2 & c' \end{bmatrix} = Q^t AQ$ e $K' = \begin{bmatrix} g' & h' & i' \end{bmatrix} = KQ$. Agora, como a inversa de Q é Q^t, então a matriz identidade $I_2 = Q^t Q$ e daí podemos deduzir que

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I_3) &= \det(Q^t AQ - \lambda I_3) = \det(Q^t AQ - \lambda Q^t Q) \\ &= \det(Q^t (A - \lambda I_3) Q) = \det(Q^t) \det(A - \lambda I_3) \det(Q) = \det(A - \lambda I_3). \end{aligned}$$

Assim, escolhida a matriz Q de forma que $d' = e' = f' = 0$,[3] obtemos que

$$\det(A - \lambda I_3) = \det(B - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} a' - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & b' - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & c' - \lambda \end{bmatrix} = -(\lambda - a')(\lambda - b')(\lambda - c').$$

Logo, os coeficientes a', b' e c' são as raízes da equação de 2º grau

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & d/2 & e/2 \\ d/2 & b - \lambda & f/2 \\ e/2 & f/2 & c - \lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{18}$$

[3]Pode-se mostrar que sempre existe uma matriz Q tal que a mudança de coordenadas dada por $X' = QX$ é tal que $d' = e' = f' = 0$. Deixamos como exercício a prova da existência de uma tal matriz Q no caso em que $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$ tem três raízes reais distintas. A demonstração do caso geral pode ser encontrada por exemplo em [4].

Vamos, agora, determinar a matriz Q. Observe que a matriz Q é tal que

$$B = Q^t A Q.$$

Multiplicando-se à esquerda pela matriz Q, obtemos

$$QB = AQ.$$

Por um lado,

$$AQ = A\,[\,U_1\ U_2\ U_3\,] = [\,AU_1\ AU_2\ AU_3\,]\,,$$

por outro lado

$$QB = [\,U_1\ U_2\ U_3\,]\begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix} = [\,a'U_1\ b'U_2\ c'U_3\,]$$

Assim, U_1, U_2 e U_3 satisfazem as equações

$$AU_1 = a'U_1, \quad AU_2 = b'U_2 \quad \text{e} \quad AU_3 = c'U_3.$$

A 1ª equação pode ser escrita como

$$AU_1 = a'I_3U_1$$

ou

$$(A - a'I_3)U_1 = \bar{0}.$$

Logo, U_1 é uma solução de norma igual a 1 do sistema linear

$$(A - a'I_3)X = \bar{0}.$$

Analogamente, U_2 é uma solução de norma igual a 1 do sistema linear

$$(A - b'I_3)X = \bar{0},$$

que seja ortogonal a U_1. Análogo também é o caso do terceiro vetor U_3. Mas como já temos dois vetores ortogonais U_1 e U_2, então U_3 pode ser tomado igual ao produto vetorial de U_1 por U_2,

$$U_3 = U_1 \times U_2.$$

Portanto com a mudança de coordenadas dada por $X = QX'$, para $Q = [\,U_1\ U_2\ U_3\,]$, a equação (14) se transforma na equação (15). Os vetores U_1, U_2 e U_3 dão a direção e o sentido dos novos eixos `x'`, `y'` e `z'`.

Vamos resumir no próximo resultado o que acabamos de provar.

Teorema 3.1. *Considere a equação*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0, \tag{19}$$

com $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R}$*, sendo* a, b, c, d, e *e* f *não simultaneamente nulos. Então por uma mudança de coordenadas tal que*

$$X = QX',$$

em que $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ *e* $Q = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \end{bmatrix}$ *a equação (19) pode sempre ser transformada em*

$$a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + g'x' + h'y' + i'z + j = 0,$$

em que a', b', c' *são raízes de*

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a-\lambda & d/2 & e/2 \\ d/2 & b-\lambda & f/2 \\ e/2 & f/2 & c-\lambda \end{bmatrix}.$$

Mais ainda, U_1 *é uma solução de norma igual a 1 do sistema linear*

$$\begin{bmatrix} a-a' & d/2 & e/2 \\ d/2 & b-a' & f/2 \\ e/2 & f/2 & c-a' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

U_2 *é uma solução de norma igual a 1 do sistema linear*

$$\begin{bmatrix} a-b' & d/2 & e/2 \\ d/2 & b-b' & f/2 \\ e/2 & f/2 & c-b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$U_3 = U_1 \times U_2.$$

Exemplo 3.1. Considere a quádrica de equação

$$x^2 = 2yz \tag{20}$$

Esta equação pode ser escrita como

$$X^t A X = 0,$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

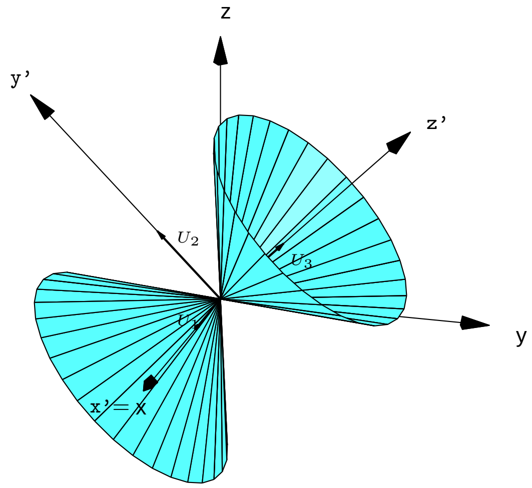


Figura 9: Cone circular do Exemplo 3.1

As raízes de

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\lambda^2 - (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1)$$

são $a' = b' = 1$ e $c' = -1$.

A forma escalonada reduzida de

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{é} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto a solução geral de $(A - I_3)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\beta, -\alpha, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

Agora, $(\alpha, -\beta, \beta) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, -1, 1)$. Assim, toda solução do sistema é combinação linear de $V_1 = (1, 0, 0)$ e $V_2 = (0, -1, 1)$.

Como $a' = b'$ teremos que encontrar dois vetores U_1 e U_2 unitários e ortogonais que são solução de $(A - I_3)X = \bar{0}$. Os vetores V_1 e V_2 já são ortogonais e assim podemos tomar

$$\begin{aligned} U_1 &= \left(\frac{1}{||V_1||}\right) V_1 = V_1 = (1, 0, 0) \\ U_2 &= \left(\frac{1}{||V_2||}\right) V_2 = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \\ U_3 &= U_1 \times U_2 = \left(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

Portanto com a mudança de coordenadas dada por $X = QX'$, para $Q = [\, U_1 \; U_2 \; U_3 \,]$, a equação (20) se transforma em

$$x'^2 + y'^2 - z'^2 = 0,$$

ou

$$x'^2 + y'^2 = z'^2,$$

que é a equação de um cone circular no novo sistema de coordenadas.

Exemplo 3.2. Considere a quádrica de equação

$$7x^2 + 10y^2 + 7z^2 - 4xy + 2xz - 4yz - 6 = 0. \tag{21}$$

Esta equação pode ser escrita como

$$X^t AX - 6 = 0,$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

As raízes de

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 7-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 10-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 7-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (7-\lambda)^2(10-\lambda) + 8 - (10-\lambda) - 8(7-\lambda) \\ &= (10-\lambda)[(7-\lambda)^2 - 1] - 8(6-\lambda) \\ &= (10-\lambda)(6-\lambda)(8-\lambda) - 8(6-\lambda) = (6-\lambda)^2(12-\lambda) \end{aligned}$$

são $a' = b' = 6$ e $c' = 12$.

A forma escalonada reduzida de

$$A - 6I_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{é} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto a solução geral de $(A - 6I_3)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(-\alpha + 2\beta, \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

Agora, $(-\alpha + 2\beta, \beta, \alpha) = \alpha(-1, 0, 1) + \beta(2, 1, 0)$. Assim, toda solução do sistema é combinação linear de $V_1 = (-1, 0, 1)$ e $V_2 = (2, 1, 0)$.

Como $a' = b'$ teremos que encontrar dois vetores U_1 e U_2 unitários e ortogonais que são solução de $(A - 6I_3)X = \bar{0}$. O vetor

$$W_2 = V_2 - \text{proj}_{V_1} V_2 = (1, 1, 1)$$

é ortogonal a V_1 e assim podemos tomar

$$\begin{aligned} U_1 &= \left(\frac{1}{||V_1||}\right) V_1 = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) \\ U_2 &= \left(\frac{1}{||W_2||}\right) W_2 = \left(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right) \\ U_3 &= U_1 \times U_2 = (-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}). \end{aligned}$$

Portanto com a mudança de coordenadas dada por $X = QX'$, para $Q = [\, U_1 \; U_2 \; U_3 \,]$, a equação (21) se transforma em

$$6x'^2 + 6y'^2 + 12z'^2 = 6 \quad \text{ou} \quad x'^2 + y'^2 + \frac{z'^2}{1/2} = 1,$$

que é a equação de um elipsóide de revolução no novo sistema de coordenadas.

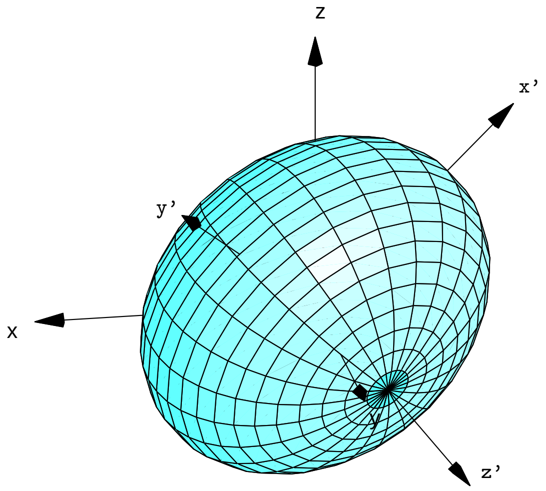


Figura 10: Elipsóide de revolução do Exemplo 3.2

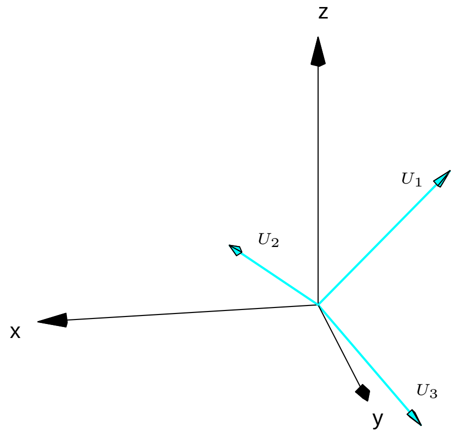


Figura 11: Novo sistema de coordenadas do Exemplo 3.2

Deixamos como exercício para o leitor a demonstração do seguinte resultado que classifica o conjunto solução de todas as equações de segundo grau em três variáveis.

Teorema 3.2. *Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos pontos do espaço que satisfazem a equação*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

com $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R}$, sendo a, b, c, d, e e f não simultaneamente nulos. Sejam a', b' e c' raízes de

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a-\lambda & d/2 & e/2 \\ d/2 & b-\lambda & f/2 \\ e/2 & f/2 & c-\lambda \end{bmatrix}.$$

(a) Se a', b' e c' tiverem mesmo sinal, então $\mathcal{S}$ é um elipsóide, um ponto ou o conjunto vazio.

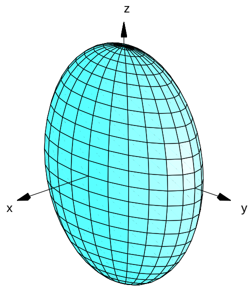
(b) Se a', b' e c' forem não nulos e não tiverem mesmo sinal, então $\mathcal{S}$ é uma hiperbolóide de uma folha, de duas folhas, ou um cone elíptico.

(c) Se apenas um entre a', b' e c' for nulo, então $\mathcal{S}$ é um parabolóide elíptico, hiperbólico, um cilindro elíptico, hiperbólico, dois planos concorrentes, uma reta ou o conjunto vazio.

(d) Se exatamente dois entre a', b' e c' forem nulos, então $\mathcal{S}$ é um cilindro parabólico, um par de planos paralelos ou um plano.

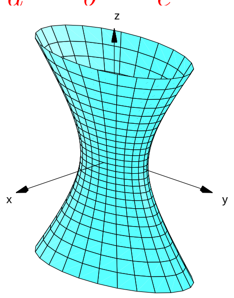
Elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



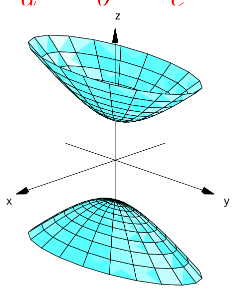
Hiperbolóide de Uma Folha

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



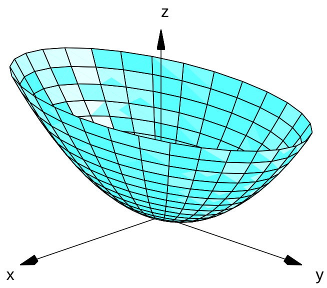
Hiperbolóide de Duas Folhas

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



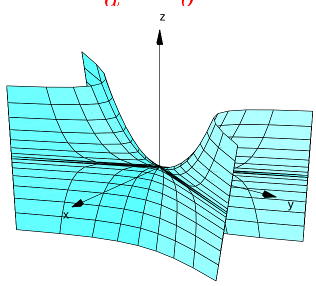
Parabolóide Elíptico

$$cz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \ c > 0$$



Parabolóide Hiperbólico

$$cz = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \ c < 0$$



Cone Elíptico

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

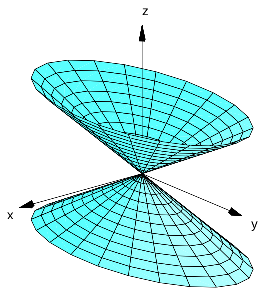


Figura 12: Algumas Quádricas não degeneradas com equações na forma padrão

Exercícios Numéricos

Identifique a quádrica, ache a equação no último sistema de coordenadas utilizado e faça um esboço do gráfico.

3.1. $2x^2 + 30y^2 + 23z^2 + 72xz + 150 = 0$;

3.2. $144x^2 + 100y^2 + 81z^2 - 216xz - 540x - 720z = 0$;

3.3. $2xy + z = 0$;

3.4. $2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z = 9$;

3.5. $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z = 24$;

Exercícios usando o MATLAB

Comandos do pacote GAAL:

`>> subst(expr,[x;y;z],[a;b;c])` substitui na expressão `expr` as variáveis `x,y,z` por `a,b,c`, respectivamente.

`>> elipso(a,b,c)` desenha o elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

`>> elipso(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o elipsóide $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> elipso(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o elipsóide $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperbo1x(a,b,c)` desenha o hiperbolóide de uma folha $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

`>> hiperbo1x(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o hiperbolóide de uma folha $-\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> hiperbo1x(a,b,[U1 U2 U3],X0)` desenha o hiperbolóide de uma folha $-\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperbo1y(a,b,c)` desenha o hiperbolóide de uma folha $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

`>> hiperbo1y(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o hiperbolóide de uma folha $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> hiperbo1y(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o hiperbolóide de uma folha $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperbo1z(a,b,c)` desenha o hiperbolóide de uma folha $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

`>> hiperbo1z(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o hiperbolóide de uma folha $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1,U2` e `U3`.

`>> hiperbo1z(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o hiperbolóide de uma folha $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1,U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperbo2x(a,b,c)` desenha o hiperbolóide de duas folhas $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

`>> hiperbo2x(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o hiperbolóide de duas folhas $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1,U2` e `U3`.

`>> hiperbo2x(a,b,[U1 U2 U3],X0)` desenha o hiperbolóide de duas folhas $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1,U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperbo2y(a,b,c)` desenha o hiperbolóide de duas folhas $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

`>> hiperbo2y(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o hiperbolóide de duas folhas $-\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1,U2` e `U3`.

`>> hiperbo2y(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o hiperbolóide de duas folhas $-\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1,U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperbo2z(a,b,c)` desenha o hiperbolóide de duas folhas $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

`>> hiperbo2z(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o hiperbolóide de duas folhas $-\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1,U2` e `U3`.

`>> hiperbo2z(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o hiperbolóide de duas folhas $-\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1,U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

`>> parabo1x(a,b,c)` desenha o parabolóide elíptico $ax = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$.

`>> parabo1x(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o parabolóide elíptico $ax' = \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2}$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> parabo1x(a,b,[U1 U2 U3],X0)` desenha o parabolóide elíptico $ax'' = \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2}$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> parabo1y(a,b,c)` desenha o parabolóide elíptico $by = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

`>> parabo1y(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o parabolóide elíptico $by' = \frac{x'^2}{a^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1,U2` e `U3`.

`>> parabo1y(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o parabolóide elíptico $by'' = \frac{x''^2}{a^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1,U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

`>> parabo1z(a,b,c)` desenha o parabolóide elíptico $cz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

`>> parabo1z(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o parabolóide elíptico $cz' = \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1,U2` e `U3`.

`>> parabo1z(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o parabolóide elíptico $cz'' = \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2}$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1,U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

`>> parabo2x(a,b,c)` desenha o parabolóide hiperbólico $ax = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

`>> parabo2x(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o parabolóide hiperbólico $ax' = \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1,U2` e `U3`.

`>> parabo2x(a,b,[U1 U2 U3],X0)` desenha o parabolóide hiperbólico $ax'' = \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1,U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

`>> parabo2y(a,b,c)` desenha o parabolóide hiperbólico $by = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

`>> parabo2y(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o parabolóide hiperbólico $by' = \frac{x'^2}{a^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1,U2` e `U3`.

`>> parabo2y(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o parabolóide hiperbólico $by'' = \frac{x''^2}{a^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1,U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

`>> parabo2z(a,b,c)` desenha o parabolóide hiperbólico $cz = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

`>> parabo2z(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o parabolóide hiperbólico $cz' = \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1,U2` e `U3`.

`>> parabo2z(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o parabolóide hiperbólico $cz'' = \frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2}$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1,U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

3.6. Use o MATLAB para resolver os **Exercícios Numéricos**

Exercícios Teóricos

3.7. Considere o polinômio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$, em que

$$A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}.$$

(a) Sejam α e β raízes reais distintas de $p(\lambda)$. Mostre que se X_1 é solução de $(A-\alpha I_2)X = \bar{0}$ e X_2 é solução de $(A-\beta I_2)X = \bar{0}$, então X_1 e X_2 são ortogonais. (Sugestão: Mostre que $\alpha X_1 \cdot X_2 = \beta X_1 \cdot X_2$)

(b) Mostre que se $p(\lambda)$ tem raízes reais distintas, então sempre existe uma matriz Q tal que

$$Q^t A Q = \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix}$$

e portanto tal que a mudança de coordenadas dada por $X = QX'$ transforma (14) em (15 na página 19.

3.8. Mostre que a superfície cônica cuja geratriz é uma parábola $y^2 = 4px$ em um plano $z = k$ é um cone elíptico.

3.9. Mostre que a interseção de um plano $by + cz + d = 0$, em que $b^2 + c^2 = 1$, com o cone $x^2 + y^2 = z^2$ é uma cônica que pode ser uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola. (Sugestão: mude para um sistema de coordenadas $\{O, U_1, U_2, U_3\}$ tal que $U_1 = \vec{i} = (1, 0, 0)$, $U_2 = (0, b, c)$ e $U_3 = (0, -c, b)$)

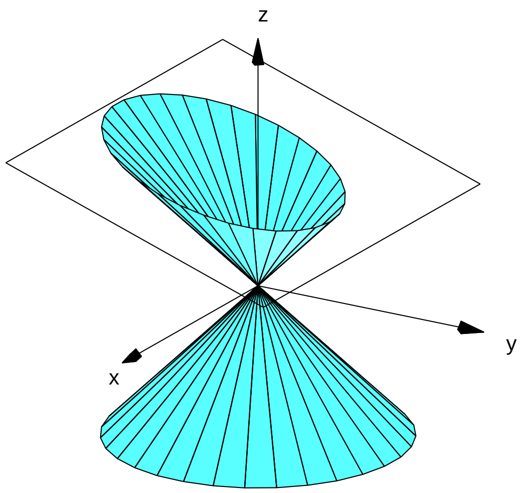


Figura 13: Elipse obtida seccionando-se o cone $x^2+y^2=z^2$ com um plano $by+cz+d=0$

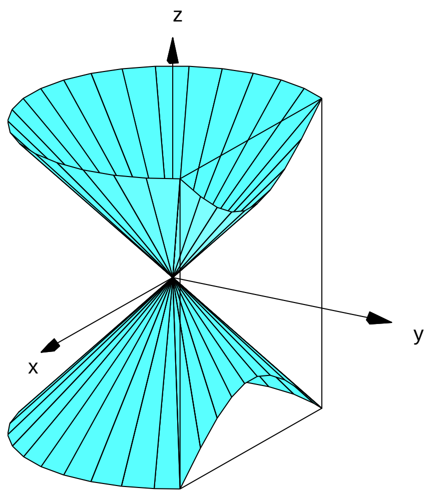


Figura 14: Hipérbole obtida seccionando-se o cone $x^2+y^2=z^2$ com um plano $by+cz+d=0$

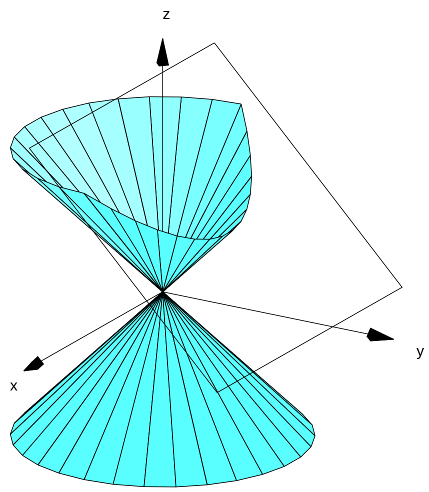


Figura 15: Parábola obtida seccionando-se o cone $x^2+y^2=z^2$ com um plano $by+cz+d=0$

3.10. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos pontos do espaço que satisfazem a equação

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+iz+j=0,$$

com $a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\in\mathbb{R}$, sendo a,b,c,d,e e f não simultaneamente nulos. Sejam a',b' e c' raízes de

$$p(\lambda)=\det\begin{bmatrix} a-\lambda & d/2 & e/2 \\ d/2 & b-\lambda & f/2 \\ e/2 & f/2 & c-\lambda \end{bmatrix}.$$

Mostre que

(a) Se a',b' e c' tiverem mesmo sinal, então $\mathcal{S}$ é um elipsóide, um ponto ou o conjunto vazio.

(b) Se a', b' e c' forem não nulos e não tiverem mesmo sinal, então $\mathcal{S}$ é uma hiperbolóide de uma folha, de duas folhas, ou um cone elíptico.

(c) Se apenas um entre a', b' e c' for nulo, então $\mathcal{S}$ é um parabolóide elíptico, hiperbólico, um cilindro elíptico, hiperbólico, dois planos concorrentes, uma reta ou o conjunto vazio.

(d) Se exatamente dois entre a', b' e c' forem nulos, então $\mathcal{S}$ é um cilindro parabólico, um par de planos paralelos ou um plano.

Referências

[1] Howard Anton and Chris Rorres. *Álgebra Linear com Aplicações*. Bookman, São Paulo, 8a. edition, 2000.

[2] Paulo Boulos and Ivan de C. e Oliveira. *Geometria Analítica - um tratamento vetorial*. Mc Graw-Hill, São Paulo, 2a. edition, 1987.

[3] Charles H. Lehmann. *Geometria Analítica*. Editora Globo, Porto Alegre, 1974.

[4] Reginaldo J. Santos. *Introdução à Álgebra Linear*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2001.

[5] Reginaldo J. Santos. *Matrizes Vetores e Geometria Analítica*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2001.

[6] Israel Vainsecher. *Notas de Geometria Analítica Elementar*. Departamento de Matemática-UFPe, Recife, 2001.