Projeção Ortográfica

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

24 de novembro de 2006

Esta projeção é usada para fazer desenhos de objetos tridimensionais no papel ou na tela do computador. Com esta projeção os pontos no espaço são projetados ortogonalmente ao plano do desenho.

Para encontrar a projeção de um ponto P podemos encontrar as coordenadas de P em relação ao sistema $\mathcal{S}' = \{O', U_1, U_2, U_3\}$ e tomar as duas primeiras coordenadas.

Como a projeção em qualquer plano paralelo ao plano do desenho fornece as mesmas coordenadas podemos supor que $O' = O$, ou seja, que os dois sistemas têm a mesma origem.

A relação entre as coordenadas de um ponto nos dois sistemas

$$\mathcal{S}' = \{O, U_1, U_2, U_3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{S} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$$

é dada por

$$X' = Q^t X, \quad \text{em que } Q = [\, U_1 \, U_2 \, U_3 \,]$$

Vamos encontrar os vetores U_1, U_2 e U_3 em função dos ângulos θ e ϕ. O vetor U_1 é paralelo ao plano xy e é perpendicular ao vetor $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, ou seja,

$$U_1 = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0).$$

Os vetores U_2 e U_3 estão no plano definido por $\vec{k}$ e $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$.

$$\begin{aligned} U_2 &= -\cos\phi(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0) + \operatorname{sen}\phi\vec{k} = (-\cos\phi\cos\theta, -\cos\phi\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\phi) \\ U_3 &= \cos\phi\vec{k} + \operatorname{sen}\phi(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0) = (\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \cos\phi) \end{aligned}$$

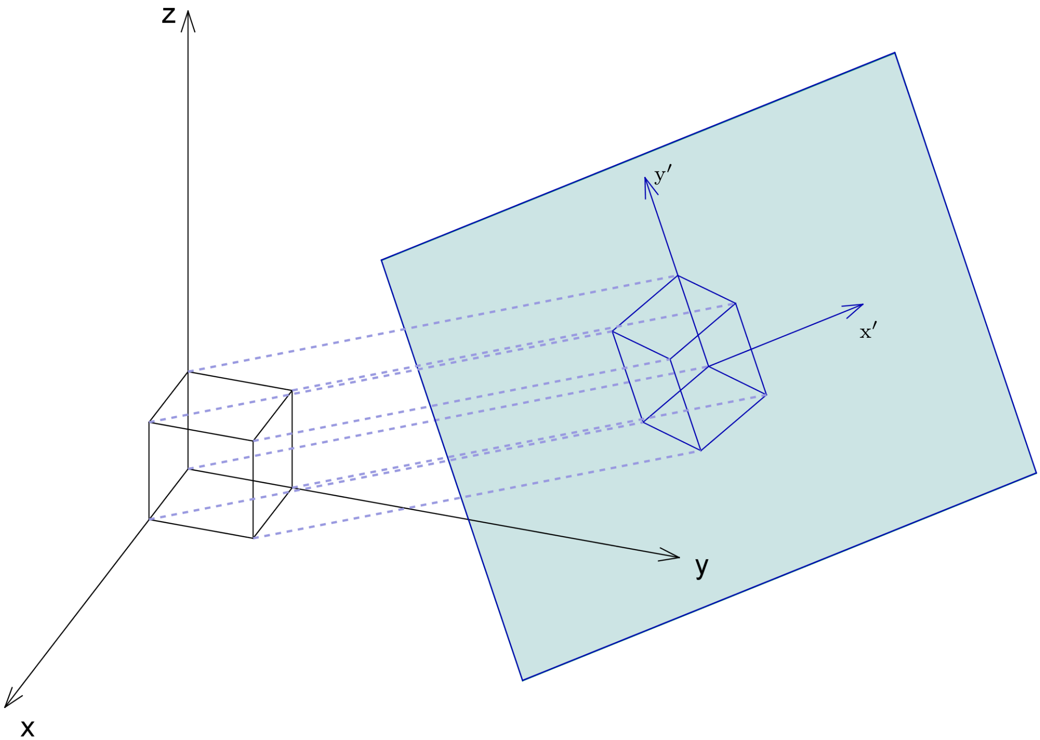

Figura 1: Projeção ortográfica de um cubo

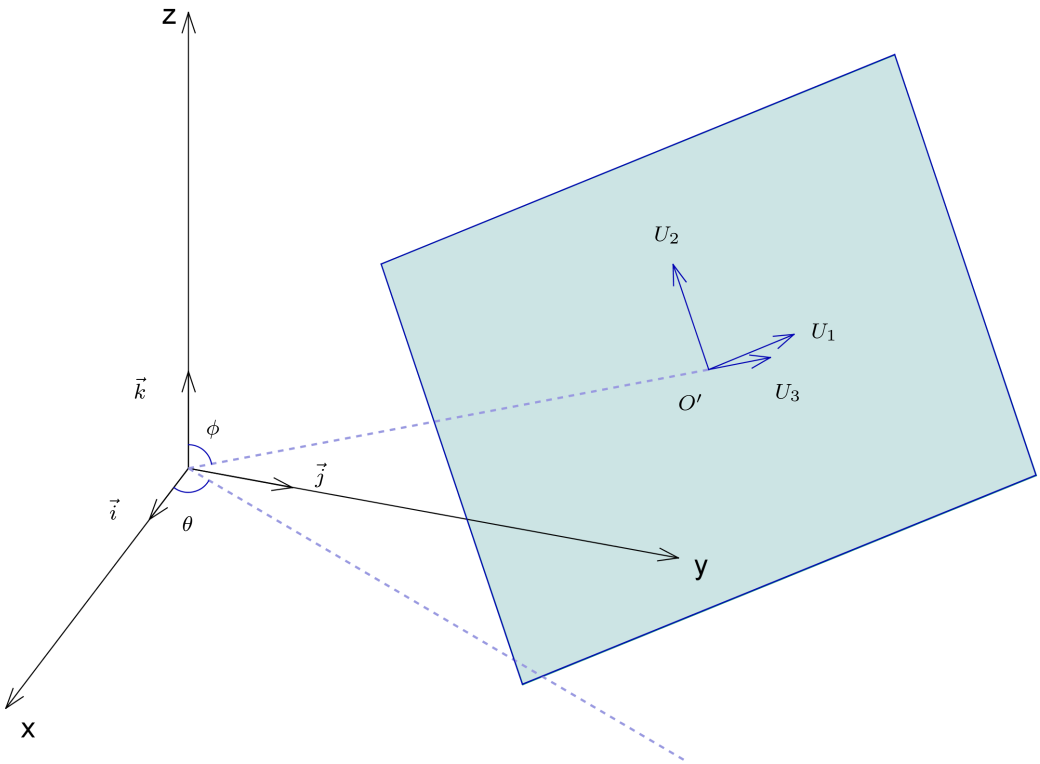

Figura 2: sistemas de coordenadas relacionados à projeção ortográfica

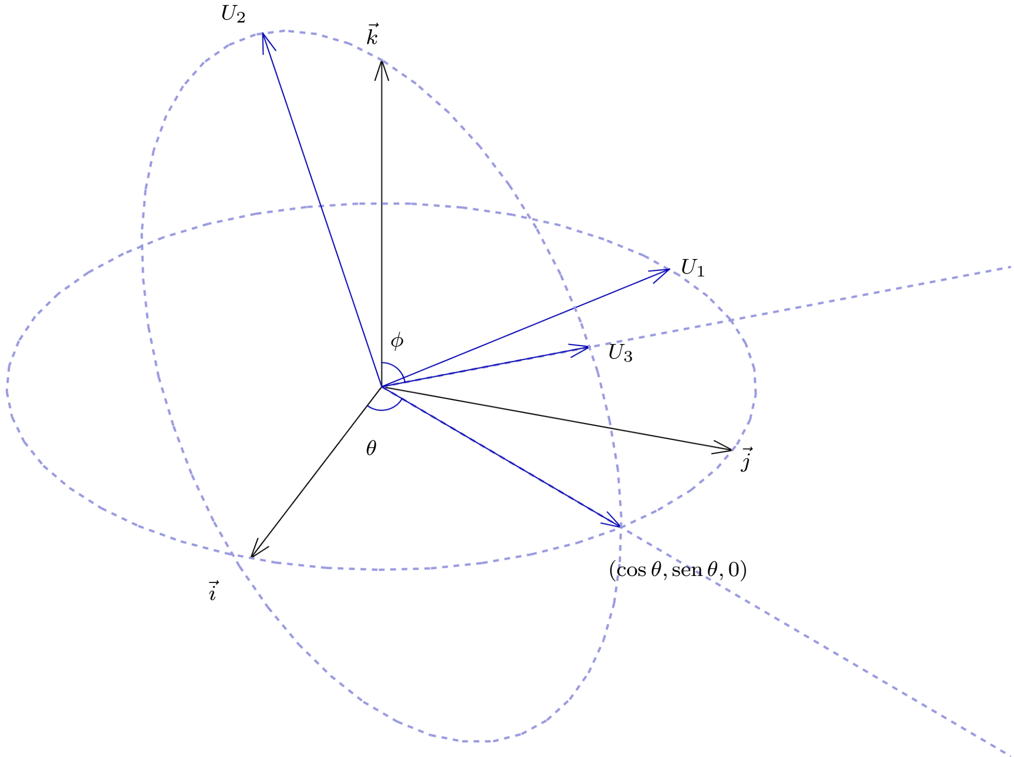

Figura 3: Bases relacionadas à projeção ortográfica

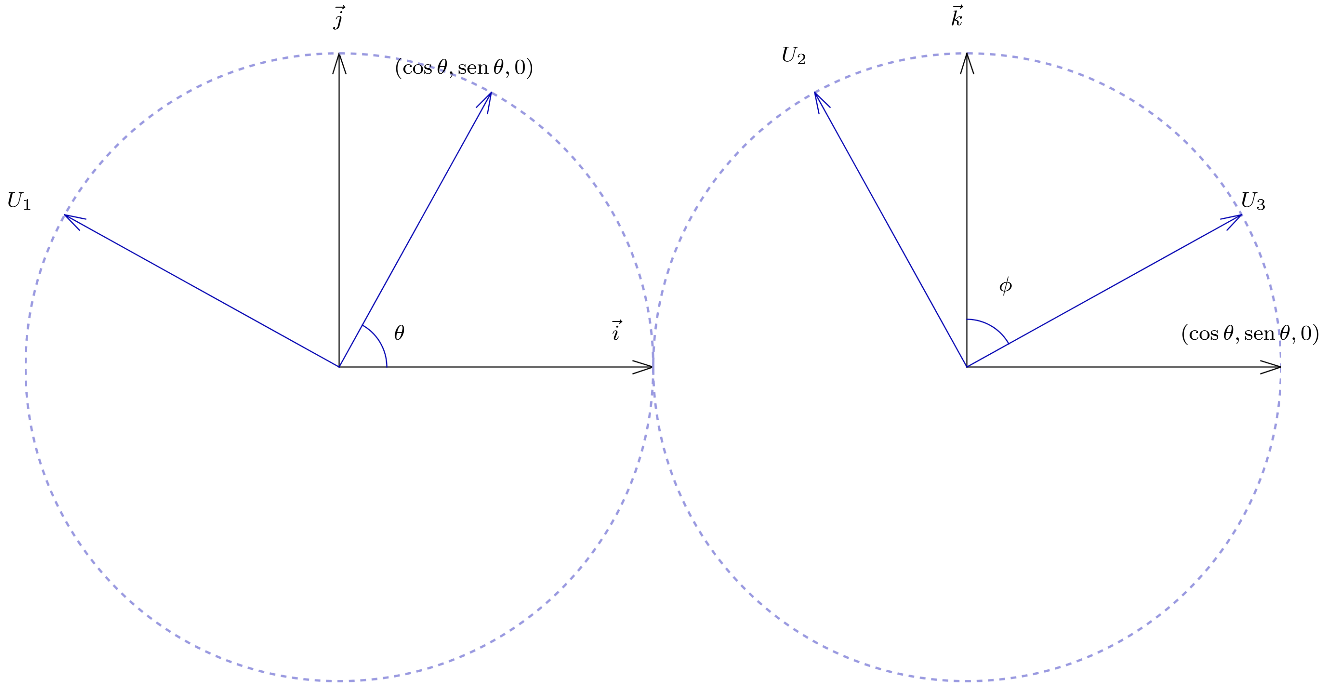

Figura 4: Relação entre os vetores das bases $\{U_1, U_2, U_3\}$ e $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

Assim a relação entre as coordenadas de um ponto nos dois sistemas

$$\mathcal{S}' = \{O, U_1, U_2, U_3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{S} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$$

é dada por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\phi\cos\theta & -\cos\phi\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi\cos\theta & \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

e a projeção é dada por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\phi\cos\theta & -\cos\phi\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Por exemplo para $\theta = 30°$ e $\phi = 60°$ temos que

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.5 & 0.87 & 0 \\ -0.4 & -0.25 & 0.87 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Usando esta projeção os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ são desenhados como na figura abaixo.

Experimente desenhar o cubo que tem a origem $O = (0, 0, 0)$ como um dos vértices e como vértices adjacentes à origem $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Observe que não é necessário calcular a projeção dos outros pontos (por que?)

No endereço http://www.mat.ufmg.br/~regi/zul/projortograf.html estão algumas páginas interativas que ilustram o que foi exposto aqui.

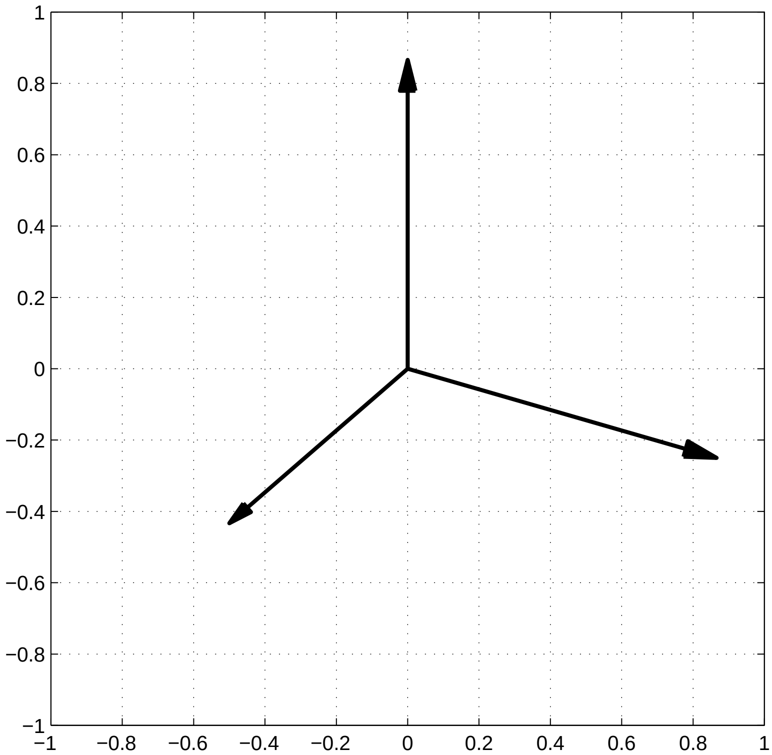

Figura 5: Vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ desenhados usando projeção ortográfica