Superfícies e Curvas no Espaço

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi
regi@mat.ufmg.br

11 de dezembro de 2001

1 Quádricas

Nesta seção estudaremos as superfícies que podem ser representadas pelas **equações quadráticas** nas variáveis x, y e z, ou seja, da forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

em que $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R}$, com a, b, c, d, e, f não simultaneamente nulos. Vamos nos limitar neste capítulo ao estudo de casos especiais da equação acima.

1.1 Elipsóide

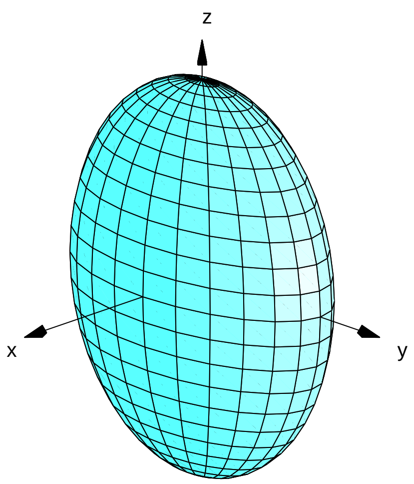

Figura 1: Elipsóide de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

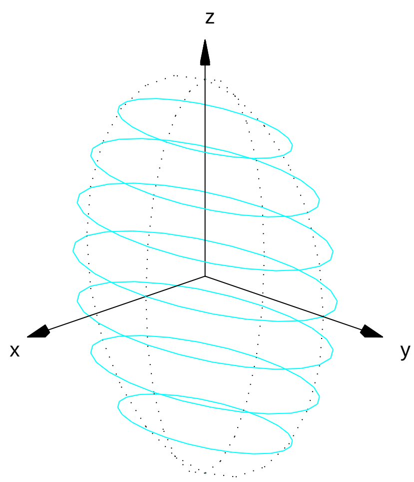

Figura 2: Elipsóide e interseções com os planos $z = k$

Um **elipsóide** é um conjunto de pontos que em algum sistema de coordenadas satisfaz a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{1}$$

em que a, b e c são números reais positivos.

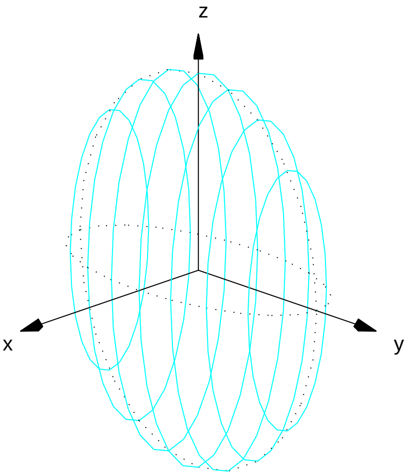

Figura 3: Elipsóide e interseções com os planos $y = k$

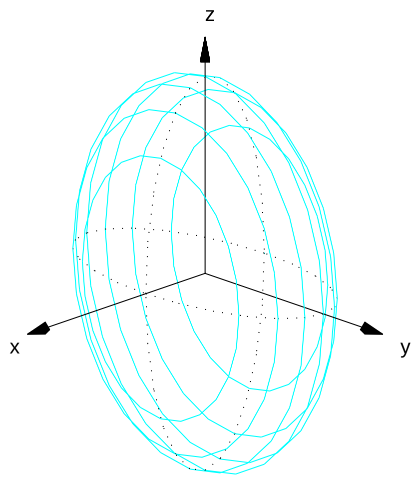

Figura 4: Elipsóide e interseções com os planos $x = k$

Observe que se (x, y, z) satisfaz (1), então $(x, y, -z)$ também satisfaz, por isso dizemos que o elipsóide (1) é simétrico em relação ao plano `xy`. Também $(x, -y, z)$ satisfaz (1), por isso dizemos que o elipsóide (1) é simétrico em relação ao plano `xz`. O mesmo acontece com $(-x, y, z)$, por isso dizemos que o elipsóide (1) é simétrico em relação ao plano `yz`. Se (x, y, z) satisfaz (1), então $(-x, -y, z)$ também satisfaz, por isso dizemos que o elipsóide (1) é simétrico em relação ao eixo `z`. O mesmo acontece com $(-x, y, -z)$, por isso dizemos que o elipsóide (1) é simétrico em relação ao eixo `y`. O mesmo acontece com $(x, -y, -z)$, por isso dizemos que o elipsóide (1) é simétrico em relação ao eixo `x`. Finalmente se (x, y, z) satisfaz (1), então $(-x, -y, -z)$ também satisfaz, por isso dizemos que o elipsóide (1) é simétrico em relação à origem.

Se $|k| < c$, o plano $z = k$ intercepta o elipsóide (1) segundo a elipse

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} = 1, \quad z = k.$$

Observe que os eixos da elipse diminuem à medida que $|k|$ aumenta.

As interseções do elipsóide (1) com o plano $x = k$, para $|k| < a$ e com o plano $y = k$, para $|k| < b$, são também elipses. Se $a = b = c$, o elipsóide é uma **esfera** de raio $r = a = b = c$.

1.2 Hiperbolóide

1.2.1 Hiperbolóide de Uma Folha

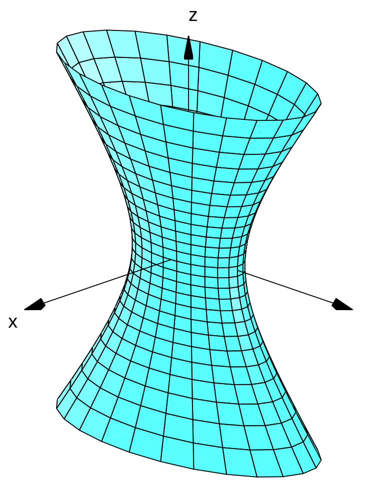

Figura 5: Hiperbolóide de uma folha de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

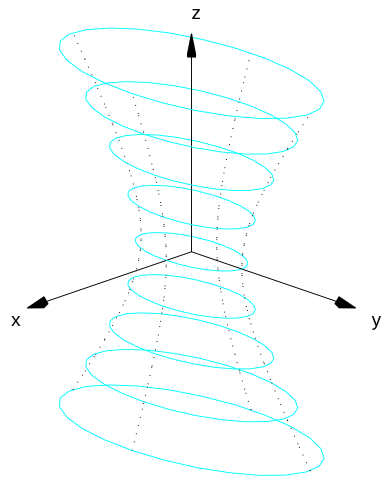

Figura 6: Hiperbolóide de uma folha e interseções com os planos $z = k$

Um **hiperbolóide de uma folha** é um conjunto de pontos que em algum sistema de coordenadas satisfaz a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{2}$$

em que a, b e c são números reais positivos.

Observe que o hiperbolóide de uma folha (2) é simétrico em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem. Pois, se (x, y, z) satisfaz (2), então $(-x, y, z)$, $(x, -y, z)$, $(x, y, -z)$, $(-x, -y, z)$, $(x, -y, -z)$, $(-x, y, -z)$ e $(-x, -y, -z)$ também satisfazem.

O plano $z = k$ intercepta o hiperbolóide de uma folha (2) segundo a elipse

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 + \frac{k^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 + \frac{k^2}{c^2}\right)} = 1, \quad z = k.$$

Observe que os eixos da elipse aumentam à medida que $|k|$ cresce.

O plano $y = k$ intercepta o hiperbolóide de uma folha (2) segundo uma curva cuja equação é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}, \quad y = k.$$

Se $|k/b| \neq 1$, então a interseção é uma hipérbole e se $|k/b| = 1$, então a interseção é um par de retas concorrentes.

Considerações semelhantes são válidas para a interseção do hiperbolóide de uma folha (2) com o plano $x = k$.

As equações

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

também representam hiperbolóides de uma folha.

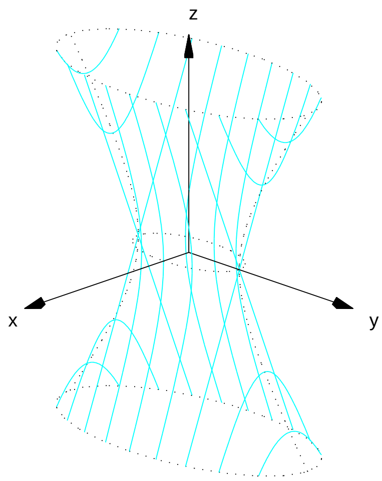

Figura 7: Hiperbolóide de uma folha e interseções com os planos $y = k$

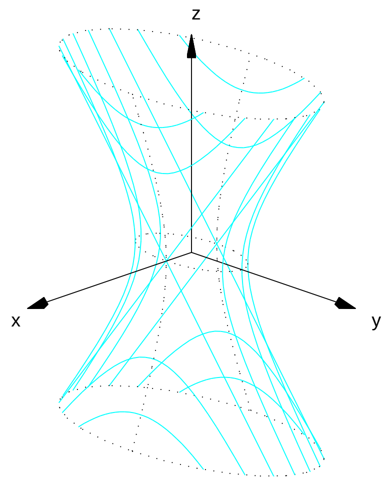

Figura 8: Hiperbolóide de uma folha e interseções com os planos $x = k$

1.2.2 Hiperbolóide de Duas Folhas

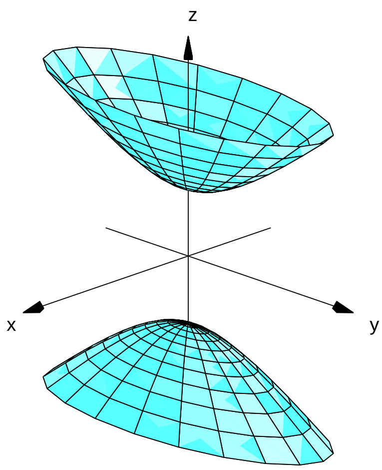

Figura 9: Hiperbolóide de duas folhas

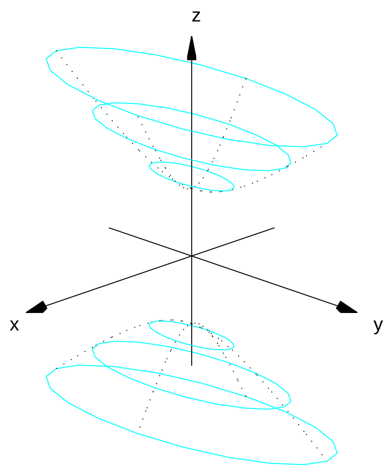

Figura 10: Hiperbolóide de duas folhas e interseções com os planos $z = k$

Um **hiperbolóide de duas folhas** é um conjunto de pontos que em algum sistema de coordenadas satisfaz a equação

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{3}$$

em que a, b e c são números reais positivos.

Observe que o hiperbolóide de duas folhas (3) é simétrico em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem. Pois, se (x, y, z) satisfaz (3), então $(-x, y, z)$, $(x, -y, z)$, $(x, y, -z)$, $(-x, -y, z)$, $(x, -y, -z)$, $(-x, y, -z)$ e $(-x, -y, -z)$ também satisfazem.

O plano $z = k$, para $|k| > c$, intercepta o hiperbolóide de duas folhas (3) segundo a elipse

$$\frac{x^2}{a^2\left(\frac{k^2}{c^2} - 1\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(\frac{k^2}{c^2} - 1\right)} = 1, \quad z = k.$$

O plano $y = k$ intercepta o hiperbolóide de duas folhas (3) segundo a hipérbole

$$-\frac{x^2}{a^2\left(1 + \frac{k^2}{b^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 + \frac{k^2}{b^2}\right)} = 1, \quad y = k.$$

A interseção do hiperbolóide de duas folhas (3) com o plano $x = k$ é também uma hipérbole. As equações

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

também representam hiperbolóides de duas folhas.

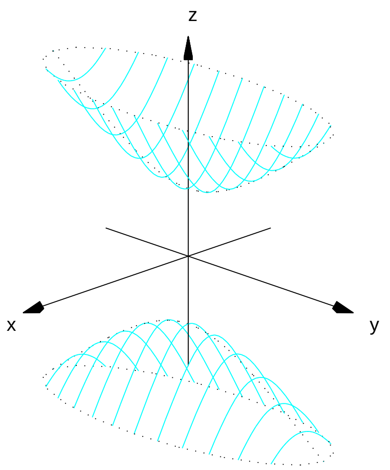

Figura 11: Hiperbolóide de duas folhas e interseções com os planos $y = k$

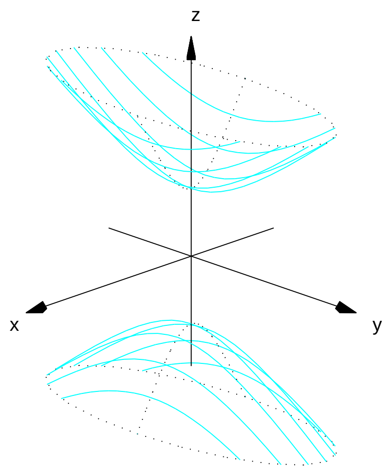

Figura 12: Hiperbolóide de duas folhas e interseções com os planos $x = k$

1.3 Parabolóide

1.3.1 Parabolóide Elíptico

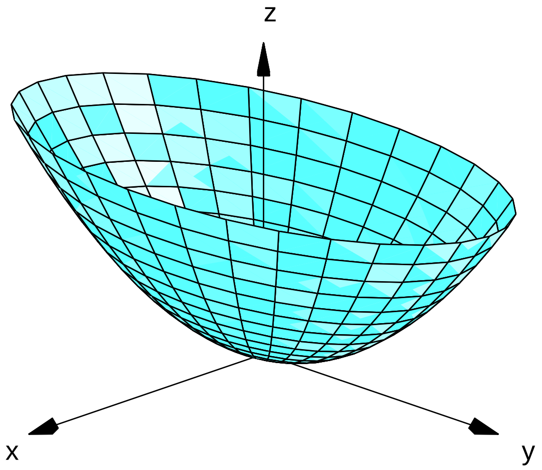

Figura 13: Parabolóide elíptico de equação $cz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, para $c > 0$

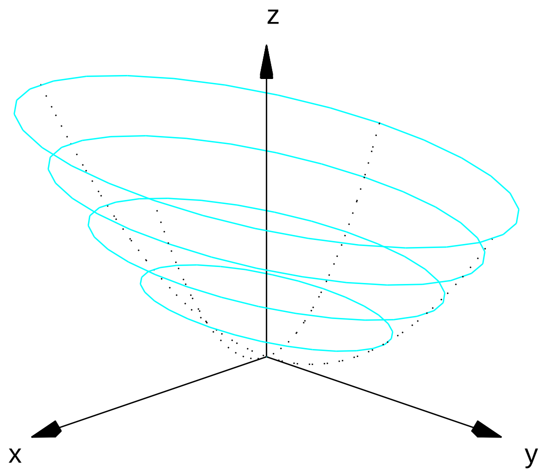

Figura 14: Parabolóide elíptico e interseções com os planos $z = k$

Um **parabolóide elíptico** é um conjunto de pontos que em algum sistema de coordenadas satisfaz a equação

$$cz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \tag{4}$$

em que a, b e c são números reais, sendo a e b positivos.

O parabolóide elíptico (4) é simétrico em relação aos planos $\mathtt{xz}$ e $\mathtt{yz}$. Pois, se (x, y, z) satisfaz (4), então $(x, -y, z)$ e $(-x, y, z)$ também satisfazem. Ele também é simétrico em relação ao eixo $\mathtt{z}$, pois se (x, y, z) satisfaz (4), então $(-x, -y, z)$ também satisfaz.

A interseção do parabolóide elíptico (4) com o plano $z = k$, para k tal que $ck > 0$, é a elipse

$$\frac{x^2}{cka^2} + \frac{y^2}{ckb^2} = 1, \quad z = k.$$

A interseção do parabolóide elíptico (4) com plano $x = k$ é a parábola

$$z = \frac{k^2}{ca^2} + \frac{y^2}{cb^2}, \quad x = k.$$

A interseção do parabolóide elíptico (4) com plano $y = k$ também é uma parábola.

As equações

$$ax = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

e

$$by = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

também representam parabolóides elípticos.

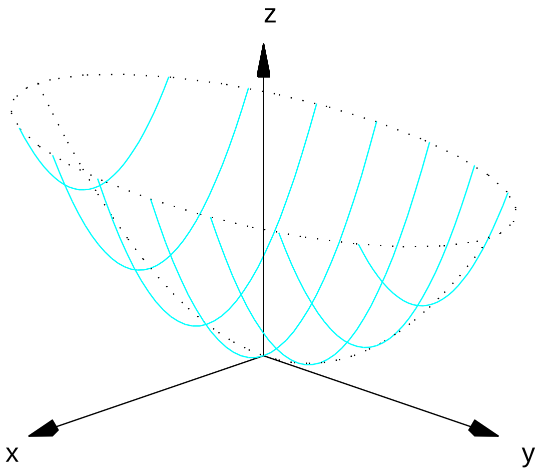

Figura 15: Parabolóide elíptico e interseções com os planos $y = k$

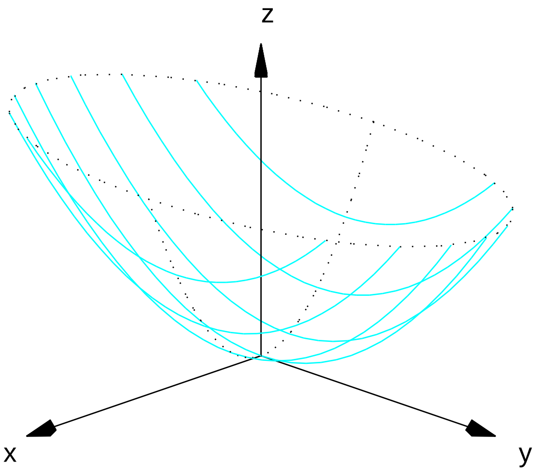

Figura 16: Parabolóide elíptico e interseções com os planos $x = k$

1.3.2 Parabolóide Hiperbólico

Um **parabolóide hiperbólico** é um conjunto de pontos que em algum sistema de coordenadas satisfaz a equação

$$cz = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \tag{5}$$

em que a, b e c são números reais, sendo a e b positivos.

O parabolóide hiperbólico (5) é simétrico em relação aos planos **xz** e **yz**. Pois, se (x, y, z) satisfaz (5), então $(x, -y, z)$ e $(-x, y, z)$ também satisfazem. Ele também é simétrico em relação ao eixo **z**, pois se (x, y, z) satisfaz (5), então $(-x, -y, z)$ também satisfaz.

A interseção do plano $z = k$ com o parabolóide hiperbólico (5) é dada por

$$\frac{x^2}{ca^2} - \frac{y^2}{cb^2} = k, \quad z = k,$$

que representa uma hipérbole, se $k \neq 0$ e um par de retas, se $k = 0$.

A interseção do parabolóide hiperbólico (5) com plano $y = k$ é a parábola

$$z = \frac{x^2}{ca^2} - \frac{k^2}{cb^2}, \quad y = k$$

que tem concavidade para cima se $c > 0$ e concavidade para baixo se $c < 0$.

A interseção do parabolóide hiperbólico com plano $x = k$ é a parábola

$$z = -\frac{y^2}{cb^2} + \frac{k^2}{ca^2}, \quad x = k$$

que tem concavidade para baixo se $c > 0$ e concavidade para cima se $c < 0$. O parabolóide hiperbólico é também chamado **sela**.

As equações

$$ax = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$$

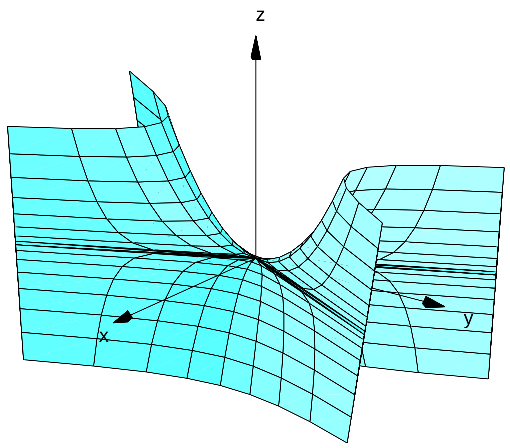

Figura 17: Parabolóide hiperbólico de equação $cz = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, para $c < 0$

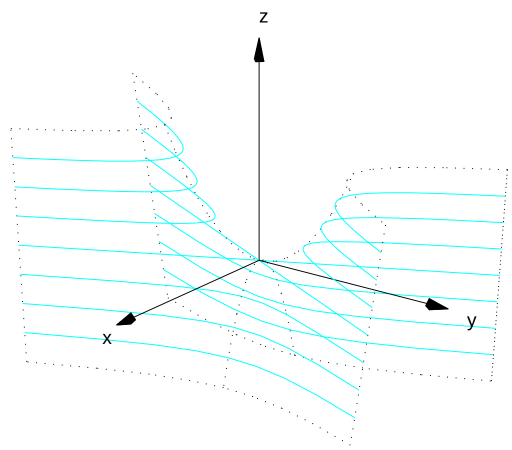

Figura 18: Parabolóide hiperbólico e interseções com os planos $z = k$

e

$$by = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$$

também representam parabolóides hiperbólicos.

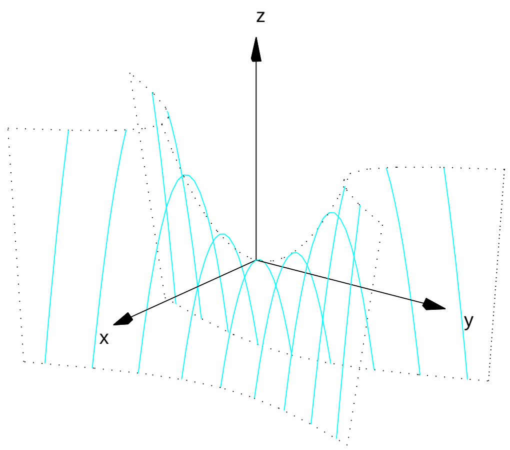

Figura 19: Parabolóide hiperbólico e interseções com os planos $y = k$

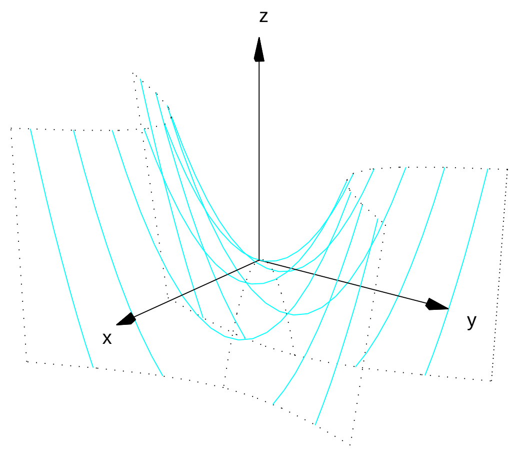

Figura 20: Parabolóide hiperbólico e interseções com os planos $x = k$

1.4 Cone Elíptico

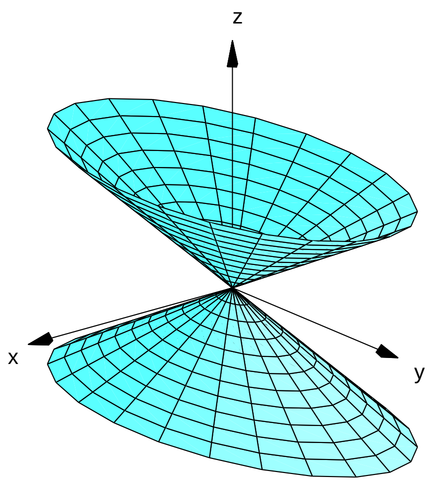

Figura 21: Cone elíptico de equação $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

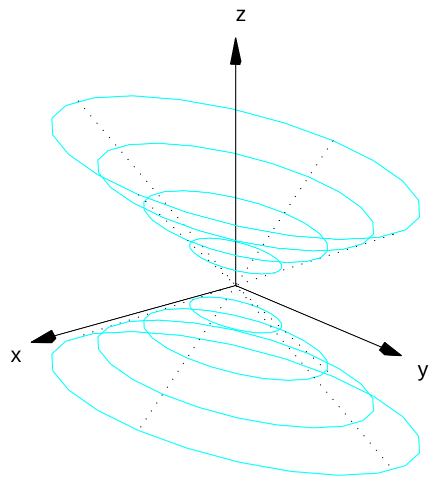

Figura 22: Cone elíptico e interseções com os planos $z = k$

Um **cone elíptico** é um conjunto de pontos que satisfaz a equação

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \tag{6}$$

em que a e b são números reais positivos, em algum sistema de coordenadas. Se $a = b$, o cone é chamado **cone circular**.

Observe que o cone elíptico (6) é simétrico em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem. Pois, se (x, y, z) satisfaz (6), então $(-x, y, z)$, $(x, -y, z)$, $(x, y, -z)$, $(-x, -y, z)$, $(x, -y, -z)$, $(-x, y, -z)$ e $(-x, -y, -z)$ também satisfazem.

A interseção do cone elíptico (6) com o plano $z = k$, para $k \neq 0$, é a elipse

$$\frac{x^2}{a^2k^2} + \frac{y^2}{b^2k^2} = 1, \quad z = k.$$

Observe que os eixos da elipse crescem à medida que $|k|$ aumenta.

Os planos **xz** e **yz** cortam o cone elíptico (6) segundo as retas

$$x = \pm az, \ y = 0 \quad \text{e} \quad y = \pm bz, \ x = 0,$$

respectivamente.

A interseção do cone elíptico (6) com o plano $y = k$, para $k \neq 0$, é a hipérbole

$$\frac{z^2}{k^2/b^2} - \frac{x^2}{a^2k^2/b^2} = 1, \quad y = k.$$

A interseção do cone elíptico (6) com o plano $x = k$, para $k \neq 0$, é a hipérbole

$$\frac{z^2}{k^2/a^2} - \frac{y^2}{b^2k^2/a^2} = 1, \quad x = k.$$

As equações

$$x^2 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \quad \text{e} \quad y^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

também representam cones elípticos.

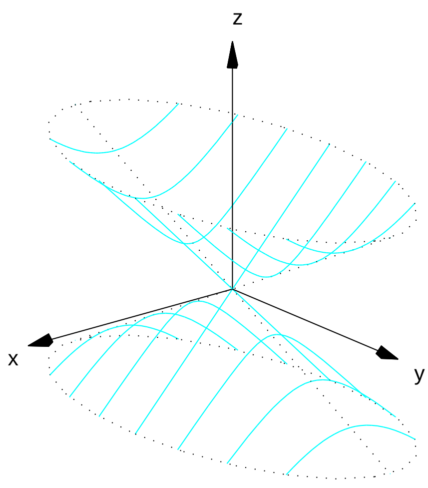

Figura 23: Cone elíptico e interseções com os planos $y = k$

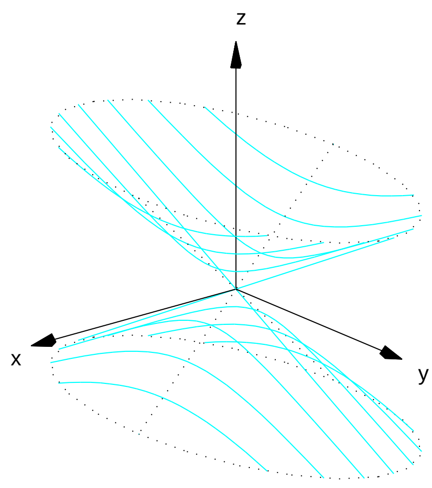

Figura 24: Cone elíptico e interseções com os planos $x = k$

1.5 Cilindro Quádrico

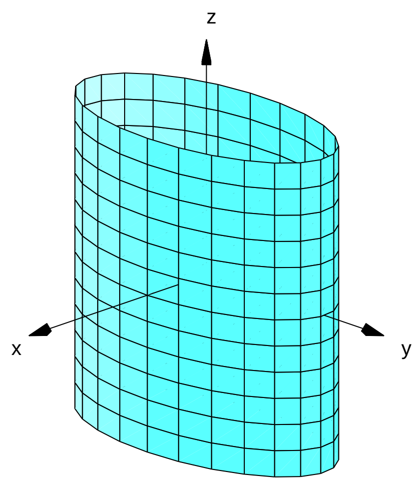

Figura 25: Cilindro elíptico de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Um **cilindro quádrico** é um conjunto de pontos do espaço, que em algum sistema de coordenadas satisfaz a equação

$$f(x, y) = 0 \tag{7}$$

em que $f(x, y) = 0$ é a equação de uma cônica no plano `xy`.

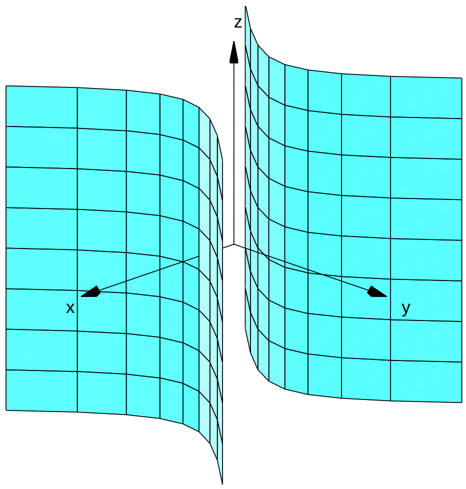

Figura 26: Cilindro hiperbólico de equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

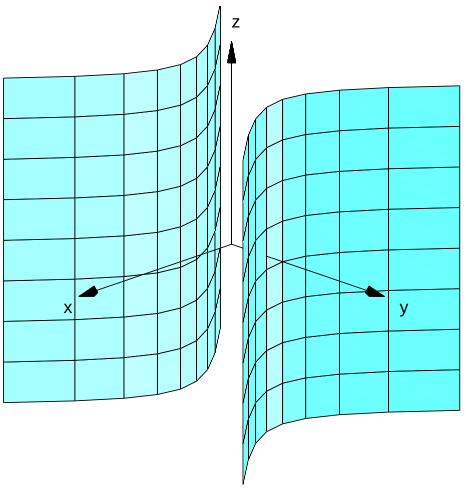

Figura 27: Cilindro hiperbólico de equação $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

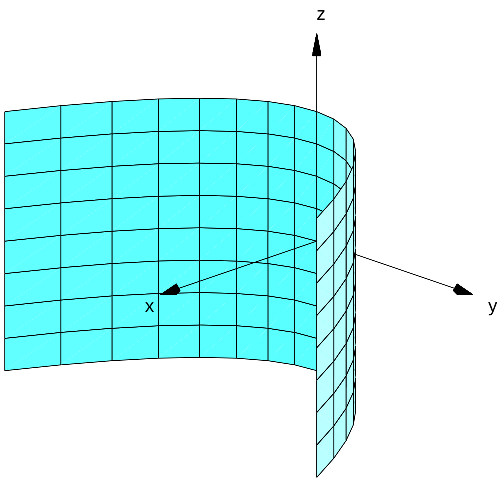

Figura 28: Cilindro parabólico de equação $y^2 = 4px$, $p > 0$

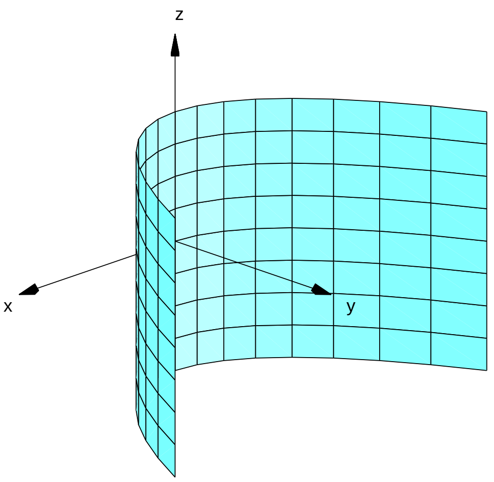

Figura 29: Cilindro parabólico de equação $x^2 = 4py$, $p > 0$

Chamamos o cilindro quádrico de **cilindro elíptico**, se a cônica de equação $f(x,y) = 0$ é uma elipse. Por exemplo, a equação $x^2 + 2y^2 = 1$ representa uma elipse no plano, enquanto representa um cilindro elíptico no espaço. Chamamos o cilindro quádrico de **cilindro hiperbólico**, se a cônica de equação $f(x,y) = 0$ é uma hipérbole. Por exemplo, a equação $x^2 - 2y^2 = 1$ representa uma hipérbole no plano, enquanto representa um cilindro hiperbólico no espaço. Chamamos o cilindro quádrico de **cilindro parabólico**, se a cônica de equação $f(x,y) = 0$ é uma parábola. Por exemplo, a equação $x^2 = 4y$ representa uma parábola no plano, enquanto representa um cilindro parabólico no espaço.

A interseção do plano $z = k$ com o cilindro é a cônica que o originou, chamada **diretriz do cilindro**:

$$f(x,y) = 0, \quad z = k.$$

Se a equação $f(x,k) = 0$ tem m soluções ($m = 0, 1$ ou 2), então o plano $y = k$ intercepta a superfície segundo m retas

$$f(x,y) = 0, \quad y = k.$$

Considerações semelhantes são válidas para a interseção com o plano $x = k$.

As equações

$$g(x,z) = 0 \quad \text{e} \quad h(y,z) = 0$$

também representam cilindros quádricos desde que $g(x,z) = 0$ e $h(y,z) = 0$ sejam equações de cônicas nos planos `xz` e `yz`, respectivamente.

Exercícios Numéricos

1.1. Reduzir cada uma das equações de forma a identificar a quádrica que ela representa e faça um esboço do seu gráfico:

(a) $4x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$

(b) $x^2 + y + z^2 = 0$

(c) $x^2 - 9y^2 = 9$

(d) $4x^2 - 9y^2 - 36z = 0$

1.2. Obtenha a equação do lugar geométrico dos pontos eqüidistantes do plano $\pi : x = 2$ e do ponto $P = (-2, 0, 0)$. Que conjunto é este?

1.3. Obtenha uma equação do lugar geométrico dos pontos que eqüidistam das retas $r : (x, y, z) = t(1, 0, 0)$ e $s : (x, y, z) = (0, 1, 0) + t(0, 0, 1)$. Que lugar geométrico é este?

1.4. Determine a equação do lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que a soma das distâncias de P aos dois pontos $(2, 0, 0)$ e $(-2, 0, 0)$ é igual a 6. Que lugar geométrico é este?

1.5. Determine a equação do lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que o módulo da diferença entre as as distâncias de $P = (x, y, z)$ aos dois pontos $(2, 0, 0)$ e $(-2, 0, 0)$ é igual a 3. Que lugar geométrico é este?

2 Superfícies Cilíndricas, Cônicas e de Revolução

2.1 Superfícies Cilíndricas

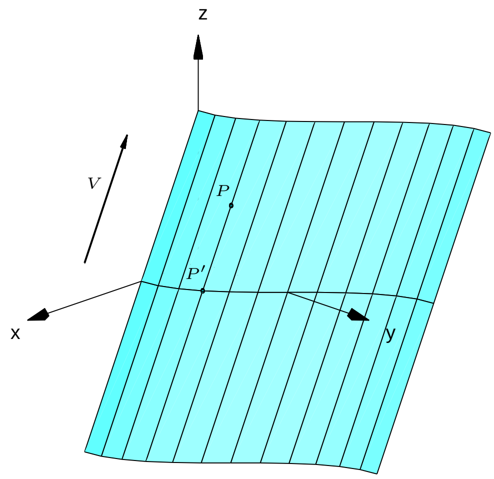

Figura 30: Superfície cilíndrica

Uma **superfície cilíndrica** é uma superfície que pode ser obtida quando uma reta, chamada **geratriz**, se move paralelamente passando por uma curva fixa, chamada **diretriz**.

Suponhamos que a curva diretriz da superfície cilíndrica $\mathcal{S}$ esteja no plano **xy** e tenha equação

$$f(x, y) = 0 \tag{8}$$

e que as retas geratrizes sejam paralelas a um vetor que não é paralelo ao plano **xy**, digamos $V = (a, b, 1)$. Seja $P = (x, y, z)$ um ponto qualquer sobre $\mathcal{S}$ e $P' = (x', y', 0)$ um ponto do plano **xy** que está na reta geratriz que passa por P. O ponto (x, y, z) pertence a $\mathcal{S}$ se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{P'P}$ é paralelo a V e P' é um ponto da curva diretriz, ou seja,

$$\overrightarrow{P'P} = \lambda V \quad \text{e} \quad f(x', y') = 0,$$

que é equivalente a

$$(x - x', y - y', z) = \lambda(a, b, 1) \quad \text{e} \quad f(x', y') = 0.$$

Destas equações obtemos que $\lambda = z$, $x' = x - az$ e $y' = y - bz$. Assim a equação da superfície cilíndrica $\mathcal{S}$ que tem curva diretriz no plano **xy** com equação (8) e retas geratrizes paralelas ao vetor $V = (a, b, 1)$ é

$$f(x - az, y - bz) = 0.$$

Resultados análogos são obtidos se a curva diretriz está situada nos planos coordenados **yz** e **xz**.

Proposição 2.1. *Considere uma superfície cilíndrica.*

(a) *Se a sua curva diretriz está no plano* $\boldsymbol{xy}$ *com equação*

$$f(x,y) = 0$$

e as retas geratrizes são paralelas ao vetor $V = (a,b,1)$, *então a sua equação é*

$$f(x - az, y - bz) = 0.$$

(b) *Se a sua curva diretriz está no plano* $\boldsymbol{yz}$ *com equação*

$$f(y,z) = 0$$

e as retas geratrizes são paralelas ao vetor $V = (1,b,c)$, *então a sua equação é*

$$f(y - bx, z - cx) = 0.$$

(c) *Se a sua curva diretriz está no plano* $\boldsymbol{xz}$ *com equação*

$$f(x,z) = 0$$

e as retas geratrizes são paralelas ao vetor $V = (a,1,c)$, *então a sua equação é*

$$f(x - ay, z - cy) = 0.$$

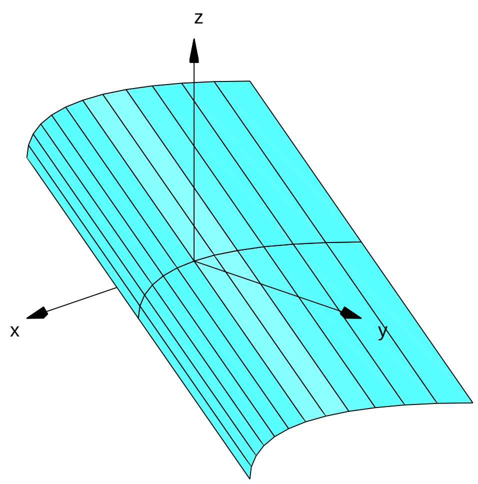

Figura 31: Superfície cilíndrica com diretrizes paralelas ao vetor $W = (1,2,3)$ e curva geratriz $x^2 - 4y = 0$, $z = 0$

Exemplo 2.1. Vamos determinar a equação da superfície cilíndrica que tem como curva diretriz no plano **xy** a parábola de equação $x^2 - 4y = 0$ e retas diretrizes paralelas ao vetor $W = (1, -2, 3)$. Para obtermos um vetor que tem a 3ª componente igual a 1 multiplicamos o vetor W por $1/3$ obtendo o vetor $V = (1/3, -2/3, 1)$ que também é paralelo às retas geratrizes. A equação da superfície é então

$$(x - z/3)^2 - 4(y + 2y/3) = 0.$$

Consideremos o problema inverso, ou seja, uma superfície de equação

$$F(x, y, z) = 0$$

é uma superfície cilíndrica se puder ser escrita na forma

$$f(x - az, y - bz) = 0 \quad \text{ou} \quad f(y - bx, z - cx) = 0 \quad \text{ou} \quad f(x - ay, z - cy) = 0.$$

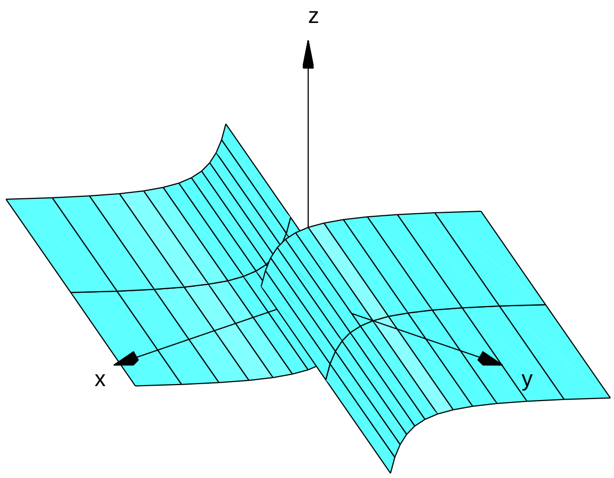

Figura 32: Superfície cilíndrica de equação $-3x^2 + 3y^2 + 2xz + 4yz + z^2 = 27$

Exemplo 2.2. Vamos mostrar que a superfície de equação

$$-3x^2 + 3y^2 + 2xz + 4yz + z^2 = 27$$

é uma superfície cilíndrica. Fazendo $z = 0$ obtemos a curva candidata a diretriz no plano **xy**

$$-3x^2 + 3y^2 = 27$$

Agora, substituindo-se x por $x - \alpha z$ e y por $y - \beta z$ na equação da candidata a curva diretriz obtemos

$$-3(x - \alpha z)^2 + 3(y - \beta z)^2 = -3x^2 + 3y^2 + 6\alpha xz - 6\beta yz + (-3\alpha^2 + 3\beta^2)z^2 = 27.$$

Comparando-se com a equação da superfície obtemos que

$$\alpha = 1/3 \quad \text{e} \quad \beta = -2/3$$

Portanto a superfície é cilíndrica com retas geratrizes paralelas ao vetor $V = (1/3, 1, -2/3)$ e com curva diretriz $-3x^2 + 3y^2 = 27$.

2.2 Superfícies Cônicas

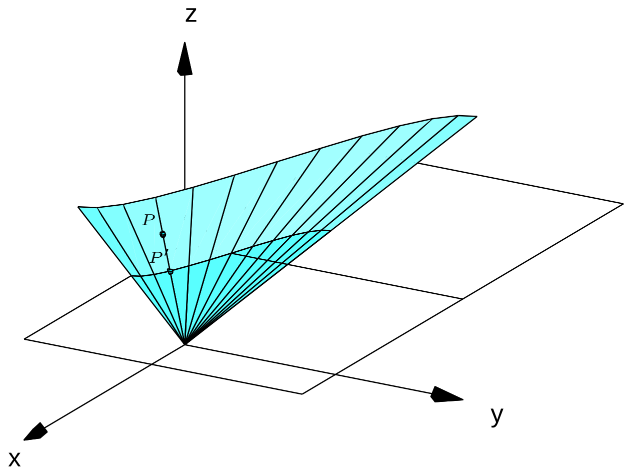

Figura 33: Superfície cônica

Uma **superfície cônica** é uma superfície que pode ser obtida quando uma reta se move de maneira que sempre passa por uma curva fixa, chamada **diretriz**, e por um ponto fixo, chamado **vértice**, não situado no plano da geratriz.

Suponhamos que a curva diretriz da superfície cônica $\mathcal{S}$ esteja no plano $z = c$ e tenha equação

$$f(x, y) = 0 \tag{9}$$

e que o vértice esteja na origem $O = (0, 0, 0)$. Seja $P = (x, y, z)$ uma ponto qualquer de $\mathcal{S}$ e $P' = (x', y', c)$ o ponto da curva diretriz situado na reta que une P à origem. O ponto P pertence a $\mathcal{S}$ se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{OP}$ é paralelo a $\overrightarrow{OP'}$ e P' é um ponto da curva diretriz, ou seja,

$$\overrightarrow{OP} = \lambda \, \overrightarrow{OP'} \quad \text{e} \quad f(x', y') = 0,$$

que é equivalente a

$$(x, y, z) = \lambda(x', y', c) \quad \text{e} \quad f(x', y') = 0.$$

Destas equações obtemos que $\lambda = z/c$, $x' = cx/z$ e $y' = cy/z$. Assim a equação da superfície cônica $\mathcal{S}$ que tem curva diretriz no plano $z = c$ com equação (9) e vértice na origem é

$$f(\frac{cx}{z}, \frac{cy}{z}) = 0.$$

Resultados análogos são obtidos se a curva diretriz está situada nos planos $y = b$ e $x = a$.

Proposição 2.2. *Considere uma superfície cônica.*

(a) *Se a sua curva diretriz está no plano $z = c$ com equação*

$$f(x, y) = 0$$

e o vértice está na origem, então a sua equação é

$$f(\frac{cx}{z}, \frac{cy}{z}) = 0.$$

(b) *Se a sua curva diretriz está no plano $x = a$ com equação*

$$f(y, z) = 0$$

e o vértice está na origem, então a sua equação é

$$f(\frac{ay}{x}, \frac{az}{x}) = 0.$$

(c) *Se a sua curva diretriz está no plano $y = b$ com equação*

$$f(x, z) = 0$$

e o vértice está na origem, então a sua equação é

$$f(\frac{bx}{y}, \frac{bz}{y}) = 0.$$

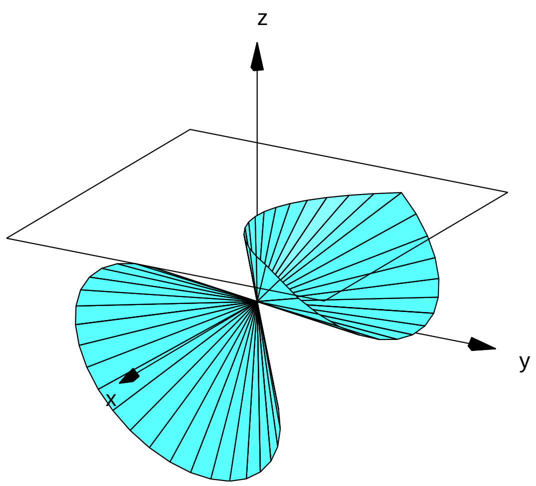

Figura 34: Superfície cônica cuja curva diretriz é $x^2 - 2y = 0$, $z = 1$.

Exemplo 2.3. Considere a parábola situada no plano $z = 1$ de equação

$$x^2 = 2y.$$

A equação da superfície cônica cuja curva diretriz é esta parábola e com vértice na origem $O = (0, 0, 0)$ é obtida trocando-se x por x/z e y por y/z na equação acima. Ou seja,

$$(x/z)^2 = 2(y/z).$$

ou

$$x^2 = 2yz.$$

Consideremos o problema inverso, ou seja, uma superfície de equação

$$F(x, y, z) = 0$$

é uma superfície cônica com vértice na origem $O = (0, 0, 0)$ se sempre que um ponto $P = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ pertence a ela, então a reta que passa pela origem e por P está contida na superfície. Ou seja, se um ponto $P = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ satisfaz a equação da superfície, então o ponto $P' = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ também satisfaz, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

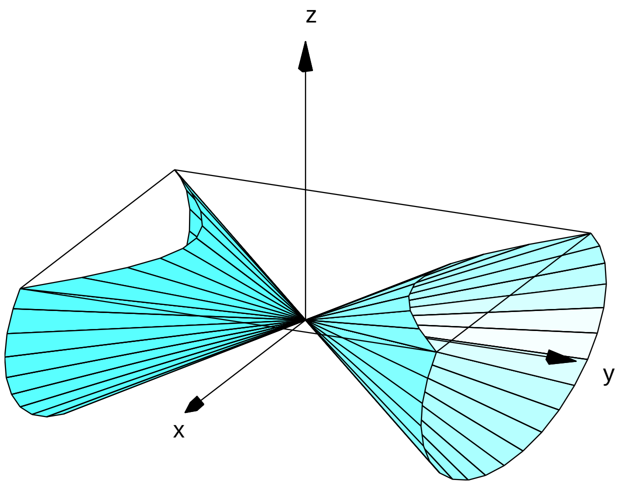

Figura 35: Superfície cônica de equação $x^2 - y^2 + 4z^2 = 0$.

Exemplo 2.4. A superfície de equação

$$x^2 - y^2 + 4z^2 = 0,$$

é uma superfície cônica com vértice na origem $O = (0, 0, 0)$, pois se (x, y, z) satisfaz a equação acima, então também $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Fazendo $z = 1$ obtemos a curva diretriz no plano $z = 1$ de equação

$$x^2 - y^2 + 1 = 0,$$

que é uma hipérbole.

2.3 Superfícies de Revolução

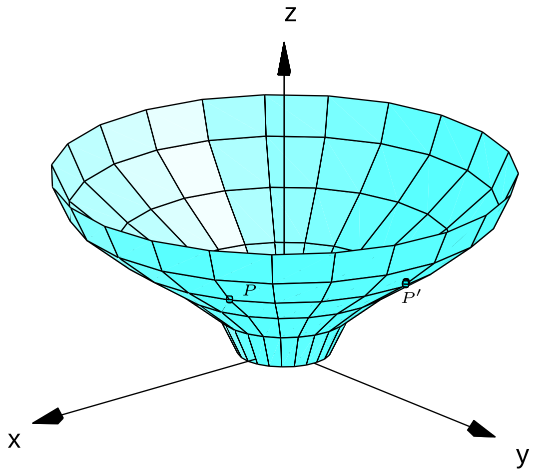

Figura 36: Superfície de revolução em torno do eixo z

Uma **superfície de revolução** é uma superfície que pode ser obtida pela rotação de uma curva plana, chamada **geratriz**, em torno de uma reta fixa, chamada **eixo (de revolução)**, no plano da referida curva. Cada ponto em cima da geratriz descreve uma circunferência em torno do eixo. Esta circunferência é chamada **paralelo** da superfície e cada posição da curva geratriz é chamada **seção meridiana**.

Se o eixo de revolução é o eixo `z` e uma curva geratriz que está situada no plano `yz` tem equação

$$f(y, z) = 0, \tag{10}$$

então o paralelo que tem altura igual a z é uma circunferência de raio dado por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por outro lado, um dos pares (r, z) ou $(-r, z)$ satisfaz a equação (10), pois o paralelo intercepta o plano `yz` nos pontos $P' = (0, r, z)$ e $P'' = (0, -r, z)$. Assim o ponto $P = (x, y, z)$ satisfaz a equação

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \quad \text{ou} \quad f(-\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \tag{11}$$

Se uma curva geratriz que está situada no plano `xz` tem equação

$$f(x, z) = 0, \tag{12}$$

então o paralelo que tem altura igual a z é uma circunferência de raio dado por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por outro lado, um dos pares (r, z) ou $(-r, z)$ satisfaz a equação (12), pois o paralelo intercepta o plano `xz` nos pontos $(r, 0, z)$ e $(-r, 0, z)$. Assim o ponto (x, y, z) satisfaz a equação

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \quad \text{ou} \quad f(-\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \tag{13}$$

Resultados análogos são obtidos quando o eixo de revolução é o eixo `x` e o eixo `y`.

Proposição 2.3. *Considere uma superfície de revolução.*

(a) *Se o seu eixo de revolução é o eixo **x** e a curva geratriz está situada no plano **xz** com equação $f(x,z)=0$, então a equação da superfície é*

$$f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2}) = 0$$

*e se a curva geratriz está situada no semiplano **xy** com equação $f(x,y)=0$, então a equação da superfície é*

$$f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2}) = 0$$

(b) *Se o seu eixo de revolução é o eixo **y** e a curva geratriz está situada no plano **yz** com equação $f(y,z)=0$, então a equação da superfície é*

$$f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}) = 0$$

*e se a curva geratriz está situada no plano **xy** com equação $f(x,y)=0$, então a equação da superfície é*

$$f(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y) = 0$$

(c) *Se o seu eixo de revolução é o eixo **z** e a curva geratriz está situada no plano **yz** com equação $f(y,z)=0$, então a equação da superfície é*

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$$

*e se a curva geratriz está situada no plano **xz** com equação $f(x,z)=0$, então a equação da superfície é*

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$$

Exemplo 2.5. (a) Considere a elipse situada no plano xz de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

A equação da superfície de revolução gerada pela rotação desta elipse em torno do eixo z é obtida trocando-se x por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ na equação acima. Ou seja,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

que é a equação de um elipsóide.

(b) Considere a hipérbole situada no plano xz de equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

A equação da superfície de revolução gerada pela rotação desta hipérbole em torno do eixo z é obtida trocando-se x por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ na equação acima. Ou seja,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

que é a equação de um hiperbolóide de uma folha.

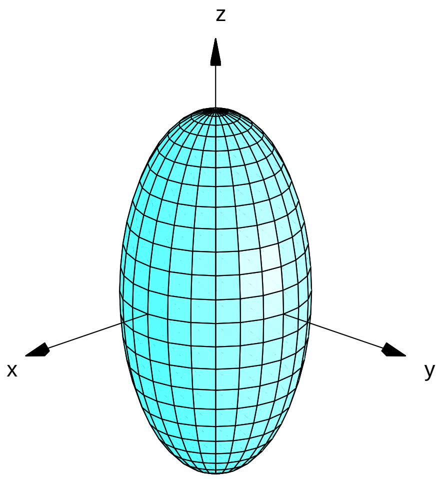

Figura 37: Elipsóide de revolução em torno do eixo z

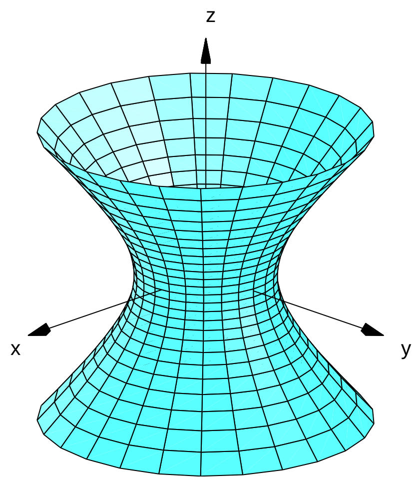

Figura 38: Hiperbolóide de uma folha de revolução em torno do eixo z

(c) Considere a hipérbole situada no plano xy de equação

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

A equação da superfície de revolução gerada pela rotação desta hipérbole em torno do eixo y é obtida trocando-se x por $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$ na equação acima. Ou seja,

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

que é a equação de um hiperbolóide de duas folhas.

(d) Considere a parábola situada no plano xz de equação

$$z = \frac{x^2}{a^2}$$

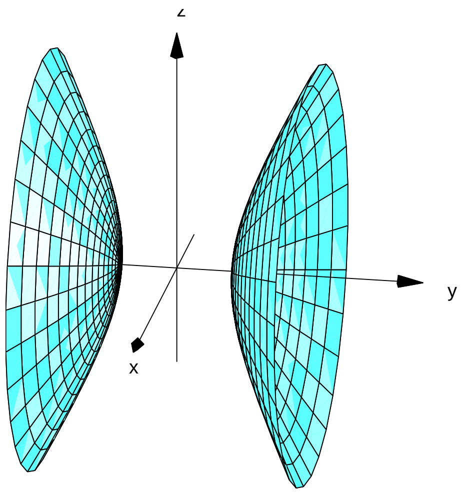

Figura 39: Hiperbolóide de duas folhas de revolução em torno do eixo y

A equação da superfície de revolução gerada pela rotação desta parábola em torno do eixo z é obtida trocando-se x por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ na equação acima. Ou seja,

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2},$$

que é a equação de um parabolóide elíptico.

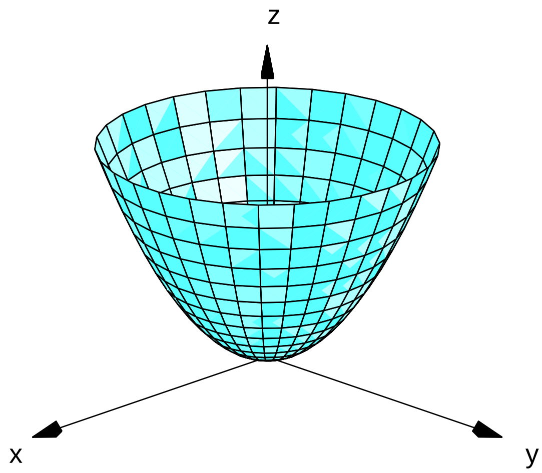

Figura 40: Parabolóide elíptico de revolução em torno do eixo z

(e) Considere a reta situada no plano xz de equação

$$z = \frac{x}{a}.$$

A equação da superfície de revolução gerada pela rotação desta reta em torno do eixo z é obtida trocando-se x por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ na equação acima. Ou seja,

$$z = \frac{\pm\sqrt{x^2+y^2}}{a}$$

que é equivalente à equação
$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2},$$
que é a equação de um cone circular.

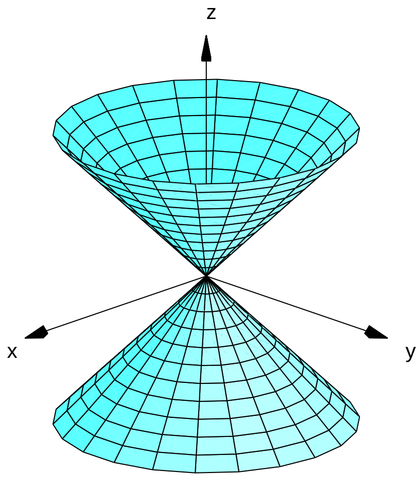

Figura 41: Cone elíptico de revolução em torno do eixo z

Consideremos o problema inverso, ou seja, uma superfície de equação
$$F(x, y, z) = 0$$
é uma superfície de revolução em torno de um dos eixos coordenados se as intercessões da superfície com planos perpendiculares ao referido eixo são circunferências com centros no referido eixo.

Exemplo 2.6. A superfície de equação
$$x^2 + y^2 = (\cos(\pi z) - 3/2)^2$$
é de uma superfície de revolução, pois fazendo $z = k$ obtemos a equação de uma circunferência
$$x^2 + y^2 = (\cos(\pi k) - 3/2)^2$$

Exemplo 2.7. (a) Um elipsóide que tem dois dos seus parâmetros iguais é um elipsóide de revolução. Por exemplo,
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1,$$
são equações de elipsóides de revolução. O primeiro, em torno do eixo `z`, o segundo, em torno do eixo `x` e o terceiro, em torno do eixo `y`.

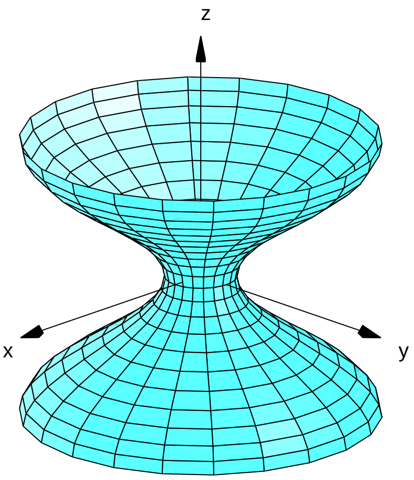

Figura 42: Superfície de revolução em torno do eixo z de equação $x^2 + y^2 = (\cos(\pi z) - 3/2)^2$

(b) O hiperbolóide de uma folha que tem os parâmetros iguais associados aos termos de sinal positivo é um hiperbolóide uma folha de revolução. Por exemplo,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1,$$

são equações de hiperbolóides de uma folha de revolução. O primeiro, em torno do eixo `z`, o segundo, em torno do eixo `x` e o terceiro, em torno do eixo `y`.

(c) O hiperbolóide de duas folhas que tem os parâmetros iguais associados aos termos de sinal negativo é um hiperbolóide duas folhas de revolução. Por exemplo,

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{a^2} = 1,$$

são equações de hiperbolóides de duas folhas de revolução. O primeiro, em torno do eixo `z`, o segundo, em torno do eixo `x` e o terceiro, em torno do eixo `y`.

(d) O cone circular de equação

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2},$$

pode ser obtido pela rotação da reta situada no plano `xz` de equação $z = \frac{x}{a}$ em torno do eixo `z`.

Exercícios Numéricos

2.1. Dadas as equações da curva diretriz e um vetor paralelo às retas geratrizes determine a equação da superfície cilíndrica

(a) $y^2 = 4x$, $z = 0$ e $V = (1, -1, 1)$
(b) $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$ e $V = (2, 1, -1)$
(c) $x^2 - y^2 = 1$, $z = 0$ e $V = (0, 2, -1)$
(d) $4x^2 + z^2 + 4z = 0$, $y = 0$ e $V = (4, 1, 0)$

2.2. Mostre que cada uma das equações representa uma superfície cilíndrica e determine a equação da curva diretriz e um vetor paralelo às retas geratrizes

(a) $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2yz = 1$
(b) $x^2 + y + 5z^2 + 2xz + 4yz - 4 = 0$
(c) $17x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xy - 6xz - 2 = 0$
(d) $xz + 2yz - 1 = 0$

2.3. Dadas as equações da curva diretriz determine a equação da superfície cônica que tem vértice na origem $O = (0, 0, 0)$.

(a) $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 2$
(b) $xz = 1$ e $y = 1$
(c) $y = x^2$ e $z = 2$
(d) $x^2 - 4z^2 = 4$ e $y = 3$

2.4. Mostre que cada uma das equações representa uma superfície cônica com vértice na origem $O = (0, 0, 0)$ e determine a equação de uma curva diretriz

(a) $x^2 - 2y^2 + 4z^2 = 0$
(b) $4z^3 - x^2y = 0$
(c) $8y^4 - yz^3 = 0$
(d) $xy + xz + yz = 0$

2.5. Determine a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da curva dada em torno do eixo especificado.

(a) $9x^2 + 4y^2 = 36$ e $z = 0$ em torno do eixo $\mathtt{y}$
(b) $x^2 - 2z^2 + 4z = 6$ e $y = 0$ em torno do eixo $\mathtt{x}$
(c) $yz = 1$ e $x = 0$ em torno do eixo $\mathtt{z}$
(d) $z = e^x$ e $y = 0$ em torno do eixo $\mathtt{z}$

2.6. Mostre que cada uma das equações representa uma superfície de revolução e determine o seu eixo de revolução e a equação de uma curva geratriz

(a) $x^2 + y^2 - z^3 = 0$
(b) $x^2 + z^2 = 4$
(c) $y^6 - x^2 - z^2 = 0$
(d) $x^2y^2 + x^2z^2 = 1$

Exercícios Teóricos

2.7. Mostre que conjunto dos pontos do espaço que satisfazem uma equação da forma

$$f(x, y) = 0 \quad \text{ou} \quad f(x, z) = 0 \quad \text{ou} \quad f(y, z) = 0$$

representa uma superfície cilíndrica que tem retas geratrizes paralelas ao eixo cuja variável não aparece na equação. Equação esta que é também a equação da curva diretriz no plano coordenado correspondente às variáveis que aparecem na equação.

2.8. Mostre que a equação de uma superfície cônica com vértice num ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e curva diretriz situada no plano $z = c$ com equação $f(x, y) = 0$ é

$$f\left(x_0 + \frac{c - z_0}{z - z_0}(x - x_0), y_0 + \frac{c - z_0}{z - z_0}(y - y_0)\right) = 0.$$

3 Coordenadas Cilíndricas Esféricas e Equações Paramétricas

3.1 Coordenadas Cilíndricas

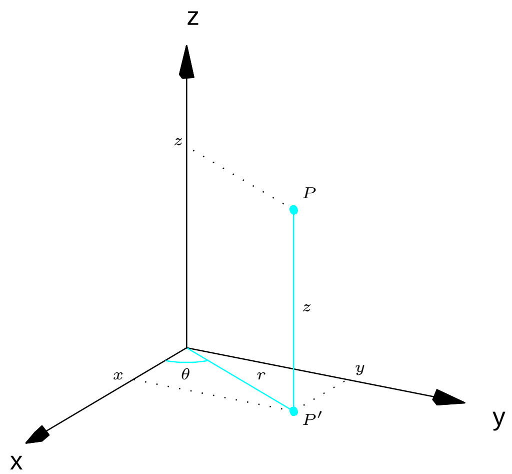

Figura 43: Coordenadas cilíndricas e cartesianas de um ponto P no espaço

Até agora vimos usando o chamado **sistema de coordenadas cartesianas**, em que um ponto no espaço é localizado em relação a três retas fixas perpendiculares entre si. Vamos definir um outro sistema de coordenadas chamado de **sistema de coordenadas cilíndricas** em que um ponto do espaço é localizado em relação a duas retas (usualmente o eixo z e o eixo x do sistema cartesiano) e um ponto (usualmente a origem O do sistema cartesiano).

No sistema de coordenadas cilíndricas um ponto no espaço é localizado da seguinte forma. Passa-se por P uma reta paralela ao eixo z. Seja P' o ponto em que esta reta intercepta o plano xy. Sejam (r, θ) as coordenadas polares de P' no plano xy. As coordenadas cilíndricas do ponto P são as coordenadas polares de P' juntamente com a terceira coordenada retangular, z, de P e são escritas na forma (r, θ, z).

Segue facilmente as relações entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas cilíndricas.

Proposição 3.1. *Suponha que o polo e o eixo polar do sistema de coordenadas polares no plano **xy** coincidem com a origem e o eixo **x** do sistema de coordenadas cartesianas no plano **xy**, respectivamente. Então a transformação entre os sistemas de coordenadas cilíndricas e o de coordenadas cartesianas podem ser realizadas pelas equações*

$$x = r\cos\theta \quad e \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad e \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad se\ x^2 + y^2 \neq 0.$$

Exemplo 3.1. Vamos determinar a equação em coordenadas cilíndricas do parabolóide elíptico de equação

$$x^2 + y^2 = a^2 z.$$

Substituindo x por $r \cos\theta$ e y por $\operatorname{sen}\theta$ obtemos

$$r^2 = a^2 z.$$

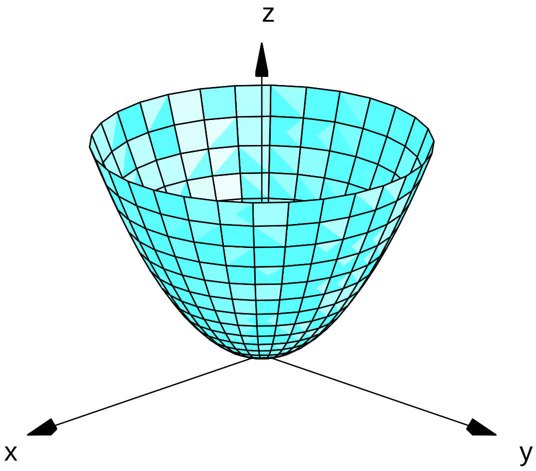

Figura 44: Parabolóide elíptico de equação em coordenadas cilíndricas $r^2 = a^2 z$

Exemplo 3.2. Vamos determinar a equação em coordenadas cilíndricas do parabolóide hiperbólico de equação

$$x^2 - y^2 = a^2 z.$$

Substituindo x por $r \cos\theta$ e y por $\operatorname{sen}\theta$ obtemos

$$r^2 \cos 2\theta = a^2 z.$$

Exemplo 3.3. Vamos determinar a equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é

$$r = a \operatorname{sen}\theta.$$

Multiplicando-se ambos os membros da equação por r obtemos

$$r^2 = ar \operatorname{sen}\theta.$$

Como $r^2 = x^2 + y^2$ e $r \operatorname{sen}\theta = y$, então obtemos

$$x^2 + y^2 = ay,$$

que é a equação de um cilindro gerado pela circunferência no plano **xy** de equação em coordenadas polares é $r = a \operatorname{sen}\theta$, ou seja, uma circunferência com raio $a/2$ e centro no ponto cujas coordenadas cartesianas são $(0, a/2)$.

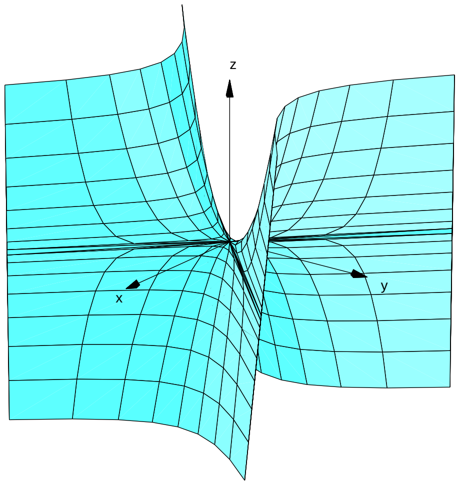

Figura 45: Parabolóide hiperbólico de equação em coordenadas cilíndricas $r^2 \cos 2\theta = a^2 z$

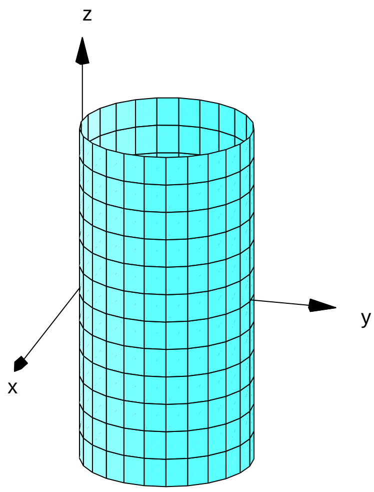

Figura 46: Cilindro circular de equação em coordenadas cilíndricas $r = a \operatorname{sen} \theta$

3.2 Coordenadas Esféricas

Vamos definir um outro sistema de coordenadas chamado de **sistema de coordenadas esféricas** em que um ponto do espaço é localizado em relação a duas retas (usualmente o eixo `z` e o eixo `x` do sistema cartesiano) e um ponto (usualmente a origem O do sistema cartesiano).

No sistema de coordenadas esféricas um ponto no espaço é localizado da seguinte forma. Passa-se por P uma reta paralela ao eixo `z`. Seja P' o ponto em que esta reta intercepta o plano `xy`. Seja θ a segunda coordenada polar de P' no plano `xy`. As coordenadas esféricas do ponto P são a distância de P à origem, $r = \mathrm{dist}(P, O)$, o ângulo, ϕ, entre os vetores $\overrightarrow{OP}$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$ e a segunda coordenada polar de P', θ. As coordenadas esféricas de um ponto P são escritas na forma (r, ϕ, θ).

Segue facilmente as relações entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas esféricas.

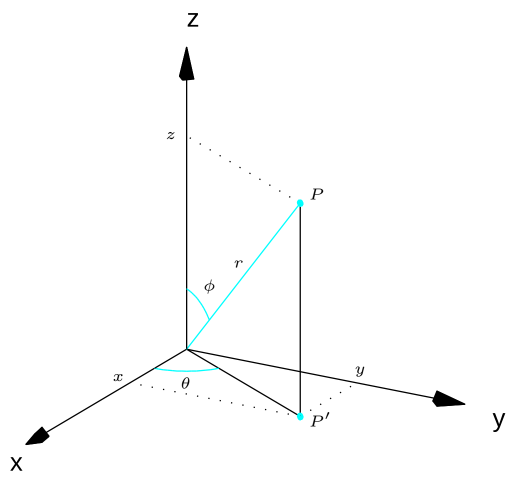

Figura 47: Coordenadas esféricas e cartesianas de um ponto P no espaço

Proposição 3.2. *Suponha que o polo e o eixo polar do sistema de coordenadas polares no plano $\boldsymbol{xy}$ coincidem com a origem e o eixo $\boldsymbol{x}$ do sistema de coordenadas cartesianas no plano $\boldsymbol{xy}$, respectivamente. Então a transformação entre os sistemas de coordenadas esféricas e o de coordenadas cartesianas podem ser realizadas pelas equações*

$$x = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \quad e \quad z = r \cos \phi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \tan \phi = \begin{cases} y/x, & se\ x \neq 0 \\ \pi/2, & se\ x = 0 \end{cases},$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad e \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad se\ x^2 + y^2 \neq 0.$$

Exemplo 3.4. Vamos determinar a equação em coordenadas esféricas do parabolóide elíptico de equação

$$x^2 + y^2 = a^2 z.$$

Substituindo x por $r \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, y por $r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$ e z por $r \cos \phi$ obtemos

$$r^2 \operatorname{sen}^2 \phi = a^2 \cos \phi.$$

Exemplo 3.5. Vamos determinar a equação em coordenadas esféricas do parabolóide hiperbólico de equação

$$x^2 - y^2 = a^2 z.$$

Substituindo x por $r \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, y por $r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$ e z por $r \cos \phi$ obtemos

$$r^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos 2\theta = a^2 \cos \phi.$$

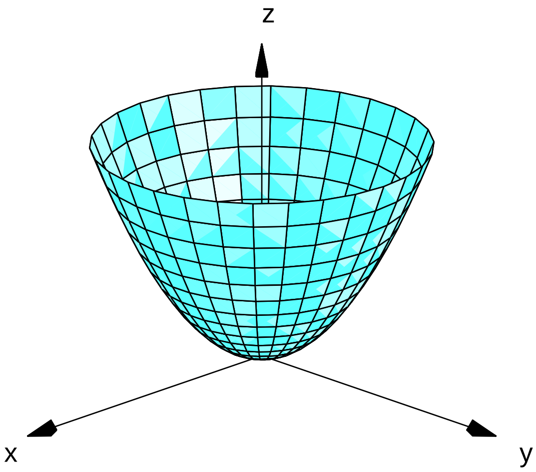

Figura 48: Parabolóide elíptico de equação em coordenadas esféricas $r^2 \operatorname{sen}^2 \phi = a^2 \cos \phi$

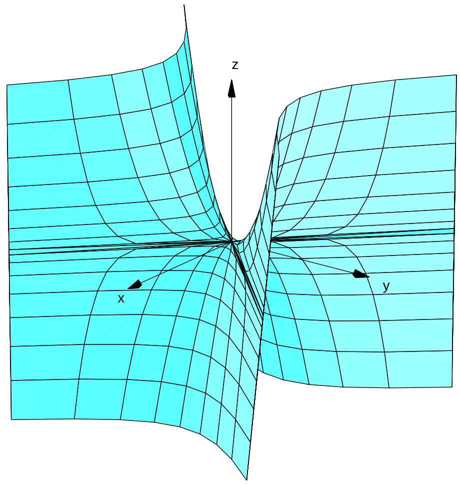

Figura 49: Parabolóide hiperbólico de equação em coordenadas esféricas $r^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos 2\theta = a^2 \cos \phi$

Exemplo 3.6. Vamos determinar a equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação em coordenadas esféricas é

$$r \operatorname{sen} \phi = a.$$

Elevando-se ao quadrado a equação acima obtemos

$$r^2 \operatorname{sen}^2 \phi = a^2.$$

Substituindo-se $\operatorname{sen}^2 \phi$ por $1 - \cos^2 \phi$ obtemos

$$r^2 - r^2 \cos^2 \phi = a^2.$$

Como $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e $r \cos \phi = z$, então obtemos

$$x^2 + z^2 = a^2,$$

que é a equação de um cilindro circular.

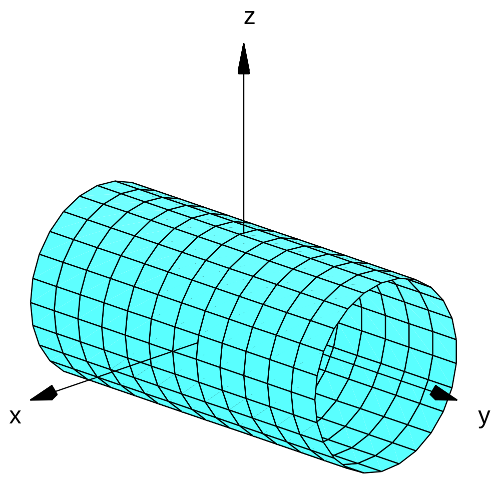

Figura 50: Cilindro circular de equação em coordenadas esféricas $r \operatorname{sen} \phi = a$

3.3 Equações Paramétricas de Superfícies

Seja

$$F(x, y, z) = 0 \tag{14}$$

a equação de uma superfície $\mathcal{S}$ em coordenadas retangulares. Sejam x, y e y funções de um par de variáveis (s, t) numa região, $\mathcal{R}$, do plano, ou seja,

$$x = f(s,t), \quad y = g(s,t) \quad \text{e} \quad z = h(s,t), \quad \text{para todo } (s,t) \in \mathcal{R}. \tag{15}$$

Se para quaisquer valores do par de variáveis (s, t) numa região, $\mathcal{R}$, do plano, os valores de x, y e z determinados pelas equações (15) satisfazem (14), então as equações (15) são chamadas **equações paramétricas da superfície $\mathcal{S}$** e as variáveis independentes s e t são chamadas **parâmetros**. Dizemos também que as equações (15) formam uma **representação paramétrica da superfície $\mathcal{S}$**.

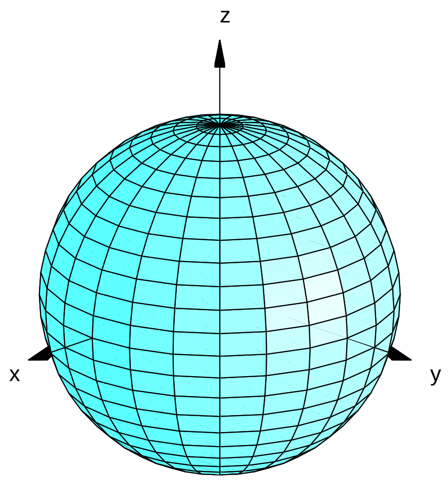

Figura 51: Esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Exemplo 3.7. Seja a um número real positivo fixo. A esfera de equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \tag{16}$$

pode ser representada parametricamente pelas equações

$$x = a \operatorname{sen} s \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad z = a \cos s \tag{17}$$

para todo $s \in [0, \pi]$ e para todo $t \in [0, 2\pi]$. Pois elevando ao quadrado cada uma das equações (17) e somando os resultados obtemos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 \operatorname{sen}^2 s \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 s \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 s \\ &= a^2 \operatorname{sen}^2 s(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) + a^2 \cos^2 s = a^2. \end{aligned}$$

A esfera definida por (16) pode também ser representada parametricamente por

$$x = s, \quad y = t \quad \text{e} \quad z = \sqrt{a^2 - s^2 - t^2}, \tag{18}$$

para todo par (s,t) pertencente ao círculo de raio a. Ou ainda por

$$x = s, \quad y = t \quad \text{e} \quad z = -\sqrt{a^2 - s^2 - t^2}, \tag{19}$$

para todo par (s,t) pertencente ao círculo de raio a. Apenas que com (18) obtemos somente a parte de cima da esfera e com (19) obtemos somente a parte de baixo.

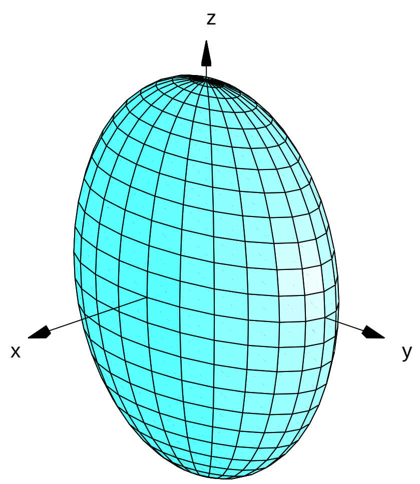

Figura 52: Elipsóide

Exemplo 3.8. O elipsóide de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{20}$$

pode ser representada parametricamente pelas equações

$$x = a \operatorname{sen} s \cos t, \quad y = b \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad z = c \cos s \tag{21}$$

para todo $s \in [0, \pi]$ e para todo $t \in [0, 2\pi]$. Pois elevando ao quadrado e dividindo por a^2 a primeira equação em (21), elevando ao quadrado e dividindo por b^2 a segunda equação em (21), elevando ao quadrado e dividindo por b^2 a terceira equação em (21) e somando os resultados obtemos

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= \operatorname{sen}^2 s \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 s \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 s \\ &= \operatorname{sen}^2 s (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) + \cos^2 s = 1. \end{aligned}$$

Exemplo 3.9. O hiperbolóide de uma folha de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{22}$$

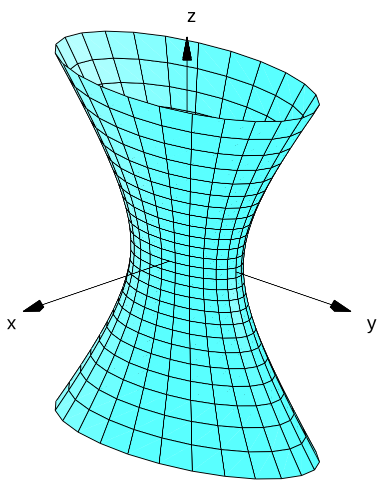

Figura 53: Hiperbolóide de uma folha

pode ser representado parametricamente pelas equações

$$x = a \sec s \cos t, \quad y = b \sec s \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad z = c \tan s, \tag{23}$$

para todo $s \in [0, 2\pi]$, $s \neq \pi/2, 3\pi/2$ e para todo $t \in [0, 2\pi]$. Pois elevando ao quadrado e dividindo por a^2 a primeira equação em (23), elevando ao quadrado e dividindo por b^2 a segunda equação em (23), somando os resultados e subtraindo do quadrado da terceira equação em (23) dividida por c^2 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= \sec^2 s \cos^2 t + \sec^2 s \operatorname{sen}^2 t - \tan^2 s \\ &= \sec^2 s \,(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) - \tan^2 s = 1. \end{aligned}$$

Usando as funções hiperbólicas, o hiperbolóide de uma folha definido por (22) pode, também, ser representado parametricamente, por

$$x = a \cosh s \cos t, \quad y = b \cosh s \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad z = c \operatorname{senh} s, \tag{24}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ e para todo $t \in [0, 2\pi]$. Pois elevando ao quadrado e dividindo por a^2 a primeira equação em (24), elevando ao quadrado e dividindo por b^2 a segunda equação em (24), somando os resultados e subtraindo do quadrado da terceira equação em (24) dividida por c^2 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= \cosh^2 s \, \cos^2 t + \cosh^2 s \, \operatorname{sen}^2 t - \operatorname{senh}^2 s \\ &= \cosh^2 s \,(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) - \operatorname{senh}^2 s = 1. \end{aligned}$$

Exemplo 3.10. O parabolóide elíptico de equação

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \tag{25}$$

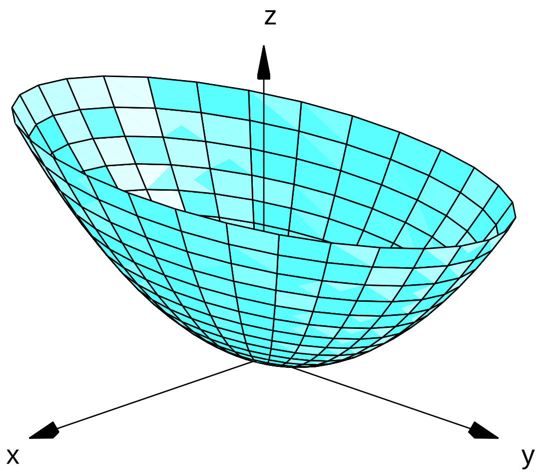

Figura 54: Parabolóide elíptico

pode ser representado parametricamente pelas equações

$$x = as\cos t, \quad y = bs\,\mathrm{sen}\,t \quad \text{e} \quad z = s^2, \tag{26}$$

para todo $s \in [0, +\infty)$ e para todo $t \in [0, 2\pi]$. Pois elevando ao quadrado e dividindo por a^2 a primeira equação em (26), elevando ao quadrado e dividindo por b^2 a segunda equação em (26), somando os resultados e subtraindo da terceira equação em (26) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z &= s^2\cos^2 t + s^2\,\mathrm{sen}^2\,t - s^2\\ &= s^2(\cos^2 t + \mathrm{sen}^2\,t) - s^2 = 0.\end{aligned}$$

3.4 Equações Paramétricas de Curvas no Espaço

Já estudamos a representação paramétrica de uma curva no plano. Este conceito pode ser estendido a curvas no espaço. Sejam x, y e z funções de uma variável t em um subconjunto, $\mathcal{I}$, do conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, ou seja,

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad \text{e} \quad z = h(t), \quad \text{para todo } t \in \mathcal{I}. \tag{27}$$

Quando t assume todos os valores em $\mathcal{I}$, o ponto $P(t) = (f(t), g(t), g(t)) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ descreve uma curva $\mathcal{C}$ no espaço. As equações (27) são chamadas **equações paramétricas** de $\mathcal{C}$. A representação paramétrica de curvas no espaço também tem um papel importante no traçado de curvas pelo computador. Já vimos um exemplo de representação paramétrica de curvas no espaço quando estudamos a reta no espaço.

Exemplo 3.11. Considere a curva parametrizada por

$$x = a\cos t, \quad y = b\,\mathrm{sen}\,t \quad \text{e} \quad z = ct, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Vamos eliminar t nas duas primeiras equações. Para isso elevamos ao quadrado as duas primeiras equações, dividimos a primeira por a^2, a segunda por b^2 e somamos obtendo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Portanto a curva está contida em um cilindro elíptico. Esta curva é chamada **hélice**.

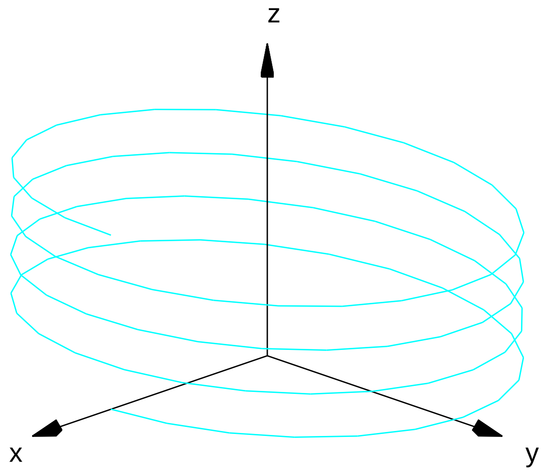

Figura 55: Hélice

Exemplo 3.12. Vamos determinar uma parametrização para a curva obtida da interseção do cone de equação $x^2 + y^2 = z^2$ com o plano $y - z = \sqrt{2}$. Uma parametrização para o cone é

$$x = s\cos t, \quad y = s\,\mathrm{sen}\,t \quad \text{e} \quad z = s.$$

Vamos usar a equação do plano para eliminar s na parametrização do cone. Substituindo-se a parametrização do cone na equação do plano obtemos

$$s\,\mathrm{sen}\,t - s = \sqrt{2}.$$

Assim,

$$s = \frac{\sqrt{2}}{\mathrm{sen}\,t - 1}.$$

Portanto,

$$x = \frac{\sqrt{2}\cos t}{\mathrm{sen}\,t - 1}, \quad y = \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t}{\mathrm{sen}\,t - 1} \quad \text{e} \quad z = \frac{\sqrt{2}}{\mathrm{sen}\,t - 1}$$

é uma parametrização para a curva.

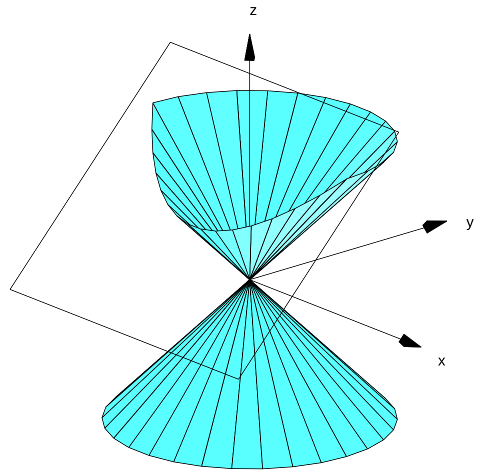

Figura 56: Curva obtida pelo corte do cone $x^2 + y^2 = z^2$ pelo plano $y - z = \sqrt{2}$

Exercícios Numéricos

3.1. Encontre uma equação em coordenadas cilíndricas da superfície cuja equação em coordenadas cartesianas é dada

(a) $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$

(b) $x^2 - y^2 = 9$

(c) $x^2 - y^2 = 3z^2$

(d) $x^2 + y^2 = z^2$

3.2. Encontre uma equação em coordenadas esféricas da superfície cuja equação em coordenadas cartesianas é dada

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9z$

(b) $x^2 + y^2 = z^2$

(c) $x^2 + y^2 = 9$

(d) $x^2 + y^2 = 2z$

3.3. Encontre uma equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é dada

(a) $r = 4$

(b) $r = 3\cos\theta$

(c) $r^2 \cos 2\theta = z^3$

(d) $z^2 \operatorname{sen}\theta = r^3$

3.4. Encontre uma equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação em coordenadas esféricas é dada

(a) $\phi = \pi/4$

(b) $r = 9\sec\phi$

(c) $r = 2\tan\theta$

(d) $r = 6\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta + 3\cos\phi$

3.5. Determine representações paramétricas para as seguintes superfícies:

(a) $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

(b) $z = -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

(c) $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

(d) $f(x, y) = 0$

3.6. Mostre que a cúbica retorcida

$$x = t, \quad y = t^2 \quad \text{e} \quad z = t^3$$

está contida no cilindro de equação $y = x^2$.

3.7. Mostre que a hélice cônica

$$x = t\cos t, \quad y = t\,\mathrm{sen}\, t \quad \text{e} \quad z = t$$

está contida no cone de equação $z^2 = x^2 + y^2$.

3.8. Determine uma parametrização para a curva obtida da interseção do cilindro de equação $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $y + z = 2$

Referências

[1] Howard Anton and Chris Rorres. *Álgebra Linear com Aplicações*. Bookman, São Paulo, 8a. edition, 2000.

[2] Paulo Boulos and Ivan de C. e Oliveira. *Geometria Analítica - um tratamento vetorial*. Mc Graw-Hill, São Paulo, 2a. edition, 1987.

[3] Charles H. Lehmann. *Geometria Analítica*. Editora Globo, Porto Alegre, 1974.

[4] Reginaldo J. Santos. *Matrizes Vetores e Geometria Analítica*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2001.

[5] Israel Vainsecher. *Notas de Geometria Analítica Elementar*. Departamento de Matemática-UFPe, Recife, 2001.