Propriedade Refletora da Elipse

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

2 de dezembro de 2011

Vamos mostrar que um espelho elíptico, reflete na direção de um foco, os raios que incidem na elipse vindo do outro foco, seguindo os seguintes passos:

(a) Considere a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Usando o fato de que um ponto da elipse pode ser escrito na forma $P = (a\cos t, b \operatorname{sen} t)$, para $t \in [0, 2\pi)$ e que a inclinação da reta tangente à elipse neste ponto é $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b\cos t}{a \operatorname{sen} t}$, mostre que a equação da reta tangente à elipse em P é

$$y = b \operatorname{sen} t - \frac{b\cos t}{a \operatorname{sen} t}(x - a\cos t), \quad \text{para } t \neq 0, \pi,$$

e que a equação da reta que passa por F_2 e é paralela ao raio que passa por F_1 depois de ser refletido em P é

$$y = \frac{b \operatorname{sen} t}{c + a\cos t}(x - c).$$

(b) Mostre que a interseção da reta tangente à elipse que passa por P e a reta que passa por F_2 e é paralela ao raio que passa por F_1 depois de ser refletido em P é o ponto

$$P_1 = \left(\frac{a(c \operatorname{sen}^2 t + a\cos t + c)}{a + c\cos t}, \frac{b \operatorname{sen} t(a - c\cos t)}{a + c\cos t} \right)$$

(c) Mostre que $\operatorname{dist}(P, F_2) = \operatorname{dist}(P_1, F_2) = a - c\cos t$. Logo o triângulo PF_2P_1 é isósceles e assim o ângulo de reflexão do raio que passa por F_1 depois de ser refletido em P, α_1, e o ângulo de incidência do raio que se reflete em P vindo de F_2, α_2, são iguais. Portanto o raio que vem de F_2 e se reflete em P necessariamente passa por F_1.

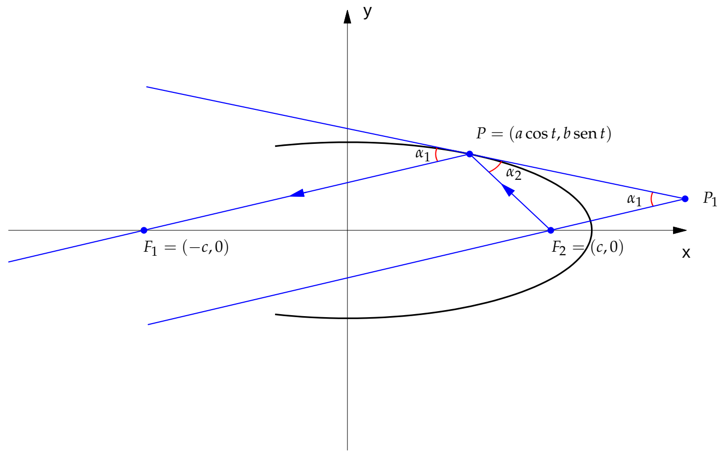

Figura 1: Elipse refletindo, na direção de um foco, os raios que incidem na elipse vindo do outro foco

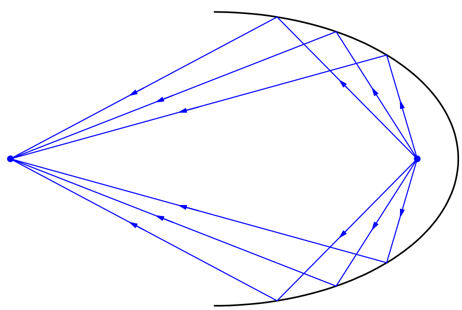

Figura 2: Espelho elíptico refletindo, na direção de um foco, os raios que incidem vindo do outro foco