

# Propriedade Refletora da Hipérbole

Reginaldo J. Santos  
Departamento de Matemática-ICEx  
Universidade Federal de Minas Gerais  
<http://www.mat.ufmg.br/~regi>

2 de dezembro de 2011

Vamos mostrar que um espelho hiperbólico, reflete na direção de um foco, os raios que incidem na hipérbole na direção do outro foco, seguindo os seguintes passos:

- (a) Considere a hipérbole  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Usando o fato de que um ponto do ramo esquerdo da hipérbole pode ser escrito na forma  $P = (-a \sec t, b \tan t)$ , para  $t \in (-\pi/2, \pi/2)$  e que a inclinação da reta tangente à hipérbole neste ponto é  $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a \sec t}$ , mostre que a equação da reta tangente à hipérbole em  $P$  é

$$y = b \tan t - \frac{b}{a \sec t}(x + a \sec t), \quad \text{para } t \neq 0,$$

e que a equação da reta que passa por  $F_2$  e é paralela ao raio que incide na direção de  $F_1$  e se reflete em  $P$  é

$$y = \frac{b \tan t}{c - a \sec t}(x - c).$$

- (b) Mostre que a interseção da reta tangente à hipérbole que passa por  $P$  e a reta que passa por  $F_2$  e é paralela ao raio que incide na direção de  $F_1$  e se reflete em  $P$  é o ponto

$$P_1 = \left( \frac{a(2c \cos^2 t - a \cos t - c)}{\cos t(a \cos t - c)}, \frac{b \sin t(a \cos t + c)}{\cos t(a \cos t - c)} \right)$$

- (c) Mostre que  $\text{dist}(P, F_2) = \text{dist}(P_1, F_2) = a + c \sec t$ . Logo o triângulo  $PF_2P_1$  é isósceles e assim o ângulo de incidência do raio que incide na direção de  $F_1$  e se reflete em  $P$ ,  $\alpha_1$ , e o ângulo de reflexão do raio que se reflete em  $P$  na direção de  $F_2$ ,  $\alpha_2$ , são iguais. Portanto o raio que incide na direção de  $F_1$  e se reflete em  $P$  necessariamente passa por  $F_2$  (veja as Figuras 1 e 2).

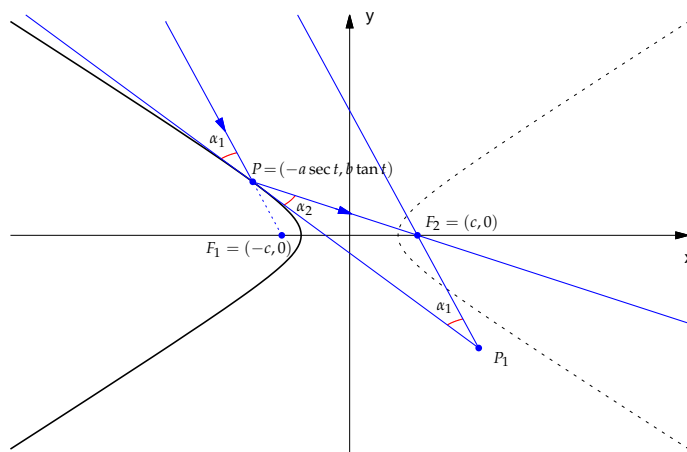


Figura 1: Hipérbole refletindo, na direção de um foco, os raios que incidem na hipérbole na direção do outro foco

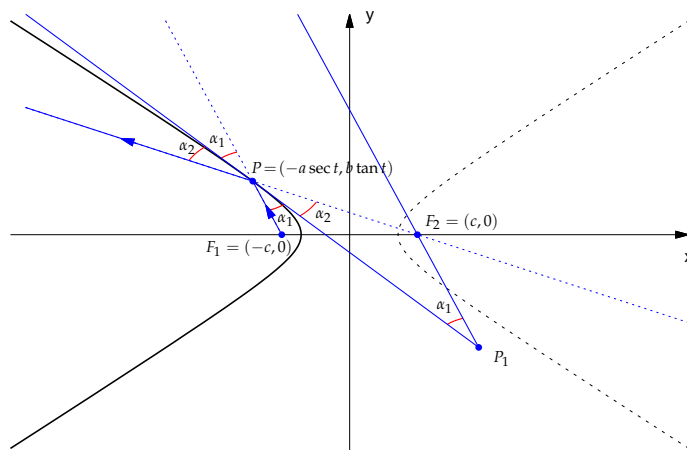


Figura 2: Hipérbole refletindo, na direção de um foco, os raios que incidem na hipérbole na direção do outro foco

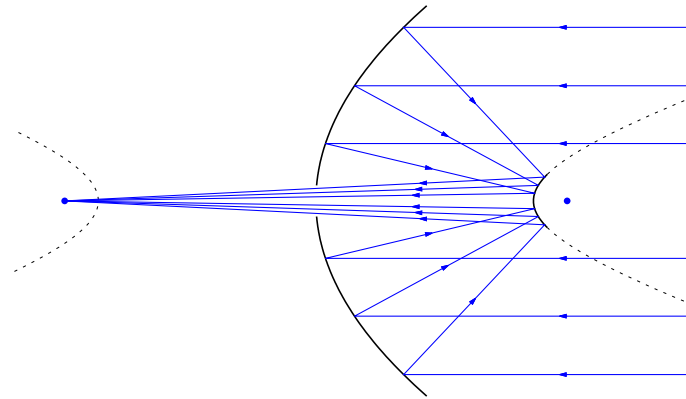


Figura 3: Espelho maior parabólico refletindo na direção do foco, em seguida os raios são refletidos por um espelho hiperbólico na direção do outro foco da hipérbole