Unicidade da Forma Escalonada Reduzida de uma Matriz

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

10 de maio de 2004

Definição 1. Uma **operação elementar sobre as linhas** de uma matriz é uma das seguintes operações:

(a) Trocar a posição de duas linhas da matriz;

(b) Multiplicar uma linha da matriz por um escalar diferente de zero;

(c) Somar a uma linha da matriz um múltiplo escalar de outra linha.

Definição 2. Uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é **equivalente por linhas** a uma matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$, se B pode ser obtida de A aplicando-se uma seqüência de operações elementares sobre as suas linhas.

A relação "ser equivalente por linhas" satisfaz as seguintes propriedades.

Teorema 1. (a) *Toda matriz é equivalente por linhas a ela mesma (reflexividade);*

(b) *Se A é equivalente por linhas a B, então B é equivalente por linhas a A (simetria);*

(c) *Se A é equivalente por linhas a B e B é equivalente por linhas a C, então A é equivalente por linhas a C (transitividade).*

Demonstração. (a) Basta multiplicar qualquer linha da matriz por um escalar igual a 1.

(b) Cada operação elementar e tem uma operação elementar inversa e^{-1} do mesmo tipo que desfaz o que a anterior fez (verifique!). Se aplicando-se as operações $e_1, \ldots, e_k$ na matriz A chegamos a matriz B, então aplicando-se as operações inversas $e_k^{-1}, \ldots, e_1^{-1}$ à matriz B chegamos à matriz A.

(c) Se aplicando-se as operações elementares $e_1, \ldots, e_k$ chegamos de A em B e aplicando-se as operações $e_{k+1}, \ldots, e_l$ chegamos de B em C, então aplicando-se as operações $e_1, \ldots, e_l$ chegamos de A em C.

$\square$

Definição 3. Uma **matriz elementar** $n \times n$ é uma matriz obtida da matriz identidade I_n aplicando-se uma, e somente uma, operação elementar.

Vamos denotar por E_{ij} a matriz elementar obtida trocando-se a linha i com a linha j da matriz I_n, $E_i(\alpha)$ a matriz elementar obtida multiplicando-se a linha i da matriz I_n

pelo escalar $\alpha \neq 0$ e $E_{i,j}(\alpha)$ a matriz elementar obtida da matriz I_n, somando-se à linha j, α vezes a linha i.

$$E_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & 1 & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & 0 & \ldots & 1 & & & \cdot \\ \cdot & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \cdot \\ \cdot & & & 1 & \ldots & 0 & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & 1 & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array}, \quad E_i(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \cdot \\ \cdot & & 1 & & & & \cdot \\ \cdot & & & \alpha & & & \cdot \\ \cdot & & & & 1 & & \cdot \\ \cdot & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\text{e} \quad E_{i,j}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \cdot \\ \cdot & & 1 & & & & \cdot \\ \cdot & & \vdots & \ddots & & & \cdot \\ \cdot & & \alpha & \ldots & 1 & & \cdot \\ \cdot & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

Exemplo 1. As matrizes seguintes são as matrizes elementares 2×2:

$$E_{1,2} = E_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_1(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \text{ com } \alpha \neq 0,$$

$$E_{1,2}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_{2,1}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sejam $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, E_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ matrizes $m \times 1$.

As matrizes elementares podem ser escritas em termos das matrizes E_i como

$$E_{i,j} = \begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ E_j^t \\ \vdots \\ E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}, \quad E_i(\alpha) = \begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ \alpha E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \quad \text{e} \quad E_{i,j}(\alpha) = \begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ E_i^t \\ \vdots \\ E_j^t + \alpha E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

Aplicar uma operação elementar em uma matriz, corresponde a multiplicar a matriz à esquerda por uma matriz elementar, como mostra o resultado a seguir.

Teorema 2. *Sejam E uma matriz elementar $m \times m$ e A uma matriz qualquer $m \times n$. Então, EA é igual à matriz obtida aplicando-se na matriz A a mesma operação elementar que originou E.*

Demonstração. Como a i-ésima linha de um produto de matrizes BA é igual a B_iA, em que B_i é a i-ésima linha da matriz B (Exercício 1.1.16 (b) na página 25 de [1]) e $E_i^tA = A_i$, em que A_i é a linha i da matriz A (Exercício 1.1.14 (b) na página 22 de [1]), então:

$$E_{i,j}A = \begin{array}{r} \\ \\ i\rightarrow \\ \\ j\rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ E_j^t \\ \vdots \\ E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} E_1^tA \\ \vdots \\ E_j^tA \\ \vdots \\ E_i^tA \\ \vdots \\ E_m^tA \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

$$E_i(\alpha)A = \begin{array}{r} \\ \\ i\rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ \alpha E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} E_1^tA \\ \vdots \\ \alpha E_i^tA \\ \vdots \\ E_m^tA \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \alpha A_i \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array}$$

$$E_{i,j}(\alpha)A = \begin{array}{r} \\ \\ i\rightarrow \\ \\ j\rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ E_i^t \\ \vdots \\ E_j^t + \alpha E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} E_1^tA \\ \vdots \\ E_i^tA \\ \vdots \\ E_j^tA + \alpha E_i^tA \\ \vdots \\ E_m^tA \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j + \alpha A_i \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

$\square$

Assim, aplicar uma seqüência de operações elementares em uma matriz, corresponde a multiplicar a matriz à esquerda por um produto de matrizes elementares.

Proposição 3. *Sejam A e B matrizes $m \times n$ equivalentes por linhas. Sejam $A_1, \ldots, A_n$ as colunas $1, \ldots, n$, respectivamente, da matriz A e $B_1, \ldots, B_n$ as colunas $1, \ldots, n$, respectivamente, da matriz B. Se existem escalares $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_k}$ tais que*

$$A_k = \alpha_{j_1} A_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_k} A_{j_k},$$

então

$$B_k = \alpha_{j_1} B_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_k} B_{j_k},$$

Demonstração. Se B é equivalente por linhas a A, então B pode ser obtida de A aplicando-se uma seqüência de operações elementares. Aplicar uma operação elementar a uma matriz corresponde a multiplicar a matriz à esquerda por uma matriz invertível (Teorema 2 na página 4). Seja M o produto das matrizes invertíveis correspondentes às operações elementares aplicadas na matriz A para se obter a matriz B. Então M é invertível e $B = MA$.

Sejam $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_k}$ escalares tais que

$$A_k = \alpha_{j_1} A_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_k} A_{j_k},$$

então multiplicando-se à esquerda pela matriz M obtemos

$$MA_k = \alpha_{j_1} MA_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_k} MA_{j_k}.$$

Como $MA_j = B_j$, para $j = 1, \ldots, n$ (Exercício 1.1.16 (a) na página 25 de [1]), então

$$B_k = \alpha_{j_1} B_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_k} B_{j_k}.$$

□

Teorema 4. *Se $R = (r_{ij})_{m\times n}$ e $S = (s_{ij})_{m\times n}$ são matrizes escalonadas reduzidas equivalentes por linhas a uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, então $R = S$.*

Demonstração. Sejam S e R matrizes escalonadas reduzidas equivalentes a A. Sejam $R_1, \ldots, R_n$ as colunas de R e $S_1, \ldots, S_n$ as colunas de S. Seja r o número de linhas não nulas de R. Sejam $j_1, \ldots, j_r$ as colunas onde ocorrem os pivôs das linhas $1, \ldots, r$, respectivamente, da matriz R. Pelo Teorema 1 na página 2, R e S são equivalentes por linha, ou seja, existe uma seqüência de operações elementares que podemos aplicar em R para chegar a S e uma outra seqüência de operações elementares que podemos aplicar a S e chegar a R.

Assim, como as colunas $1, \ldots, j_1 - 1$ de R são nulas o mesmo vale para as colunas $1, \ldots, j_1 - 1$ de S. Logo o pivô da 1ª linha de S ocorre numa coluna maior ou igual a j_1. Trocando-se R por S e usando este argumento chegamos a conclusão que $R_{j_1} = S_{j_1}$ e assim $R_1 = S_1, \ldots, R_{j_1} = S_{j_1}$.

Vamos supor que $R_1 = S_1, \ldots, R_{j_k} = S_{j_k}$ e vamos mostrar que

$$R_{j_k+1} = S_{j_k+1}, \ldots, R_{j_{k+1}} = S_{j_{k+1}}, \quad \text{se } k < r \text{ ou}$$

$$R_{j_r+1} = S_{j_r+1}, \ldots, R_n = S_n, \quad \text{se } k = r.$$

Observe que para $j = j_k + 1, \ldots, j_{k+1} - 1$, se $k < r$, ou para $j = j_r + 1, \ldots, n$, se $k = r$, temos que

$$R_j = (r_{1j}, \ldots, r_{kj}, 0, \ldots, 0) = r_{1j}R_{j_1} + \ldots + r_{kj}R_{j_k},$$

o que implica pela Proposição 3 que

$$S_j = r_{1j}S_{j_1} + \ldots + r_{kj}S_{j_k}.$$

Mas por hipótese $R_{j_1} = S_{j_1}, \ldots, R_{j_k} = S_{j_k}$, então,

$$S_j = r_{1j}R_{j_1} + \ldots + r_{kj}R_{j_k} = R_j,$$

para $j = j_k + 1, \ldots, j_{k+1} - 1$, se $k < r$ ou para $j = j_r + 1, \ldots, n$, se $k = r$.

Logo, se $k < r$, o pivô da $(k+1)$-ésima linha de S ocorre numa coluna maior ou igual a j_{k+1}. Trocando-se R por S e usando o argumento anterior chegamos a conclusão que $R_{j_{k+1}} = S_{j_{k+1}}$ e assim $R_1 = S_1, \ldots, R_{j_r} = S_{j_r}$. E se $k = r$, então $R_1 = S_1, \ldots, R_n = S_n$.

Portanto $R = S$. $\square$

Referências

[1] Reginaldo J. Santos. *Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2003.