Interpretação Geométrica de Sistemas Lineares com 3 Incógnitas

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática
Instituto de Ciências Exatas
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

1 de junho de 2001

1 Coordenadas no Espaço

Vamos introduzir um sistema de coordenadas retangulares no espaço. Para isto, escolhemos um ponto como origem O e como eixos coordenados, três retas orientadas, passando pela origem, perpendiculares entre si. Estes serão os eixos x, y e z. O eixo z é o eixo vertical. Os eixos x e y são horizontais e satisfazem a seguinte propriedade. Se os dedos da mão direita apontam na direção do semi-eixo x positivo de forma que o semi-eixo y positivo esteja do lado da palma da mão, então o polegar aponta no sentido do semi-eixo z positivo. Cada par de eixos determina um plano chamado de **plano coordenado**. Portanto os três planos coordenados são: xy, yz e xz.

A cada ponto P no espaço associamos um terno de números (x, y, z), chamado de **coordenadas do ponto** P como segue.

- Passe três planos por P paralelos aos planos coordenados.
- A interseção do plano paralelo ao plano xy, passando por P, com o eixo z determina a coordenada z.
- A interseção do plano paralelo ao plano xz, passando por P, com o eixo y determina a coordenada y
- A interseção do plano paralelo ao plano yz, passando por P, com o eixo x determina a coordenada x.

Alternativamente, podemos encontrar as coordenadas de um ponto P como segue.

- trace uma reta paralela ao eixo z, passando por P;
- A interseção da reta paralela ao eixo z, passando por P, com o plano xy é o ponto P'. As coordenadas de P', (x, y), no sistema de coordenadas xy são as duas primeiras coordendas de P.

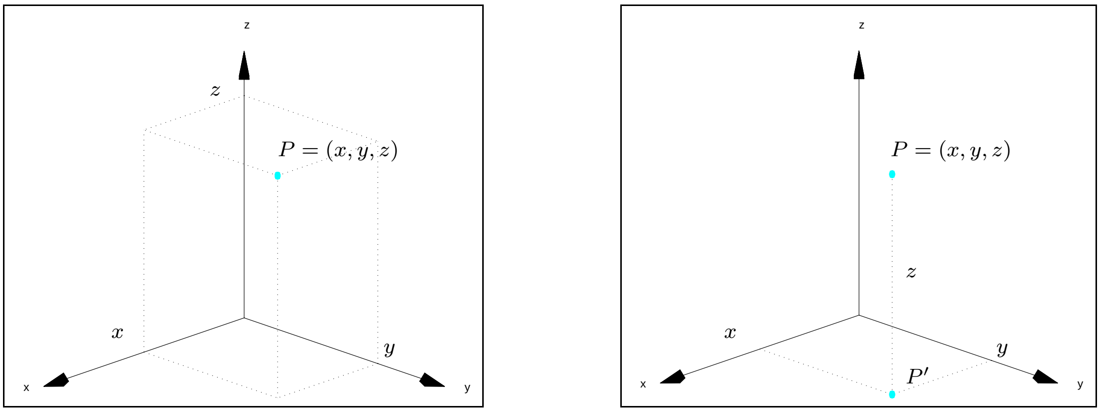


Figura 1: As coordenadas de um ponto no espaço

- A terceira coordenada é igual a distância de P a P', se P estiver acima do plano xy e menos a distância de P a P' se P estiver abaixo do plano xy.

2 Vetores

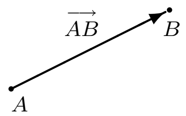
Geometricamente, vetores são representados por segmentos de retas orientados no plano ou no espaço. A direção e o sentido do segmento orientado identifica a direção e o sentido do vetor. O comprimento do segmento orientado representa a magnitude do vetor. A ponta da seta do segmento orientado é chamada **ponto final ou extremidade** do vetor e o outro ponto extremo é chamado de **ponto inicial ou origem** do vetor.

As frações $1/2$, $2/4$ e $3/6$ representam o mesmo número racional, pois o numerador e o denominador de cada uma delas estão na mesma proporção. De forma análoga, dizemos que dois segmentos orientados representam o mesmo vetor se possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido. Dois números racionais a/b e c/d são iguais, quando $ad = bc$. Analogamente, dizemos que dois vetores são iguais se eles possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.

Na Figura 2 temos 4 segmentos orientados, com origem em pontos diferentes, que representam o mesmo vetor, ou seja, são considerados como vetores iguais, pois possuem a mesma direção, mesmo sentido e o mesmo comprimento, apesar de possuirem origens em pontos diferentes.

Se o ponto inicial de um vetor V é A e o ponto final é B, então escrevemos

$$V = \overrightarrow{AB}$$



Definimos as **componentes de um vetor** V como sendo as coordenadas (v_1, v_2, v_3) do ponto final do representante de V que tem ponto inicial na origem. Identificamos o vetor por suas componentes e escrevemos simplesmente

$$V = (v_1, v_2, v_3).$$

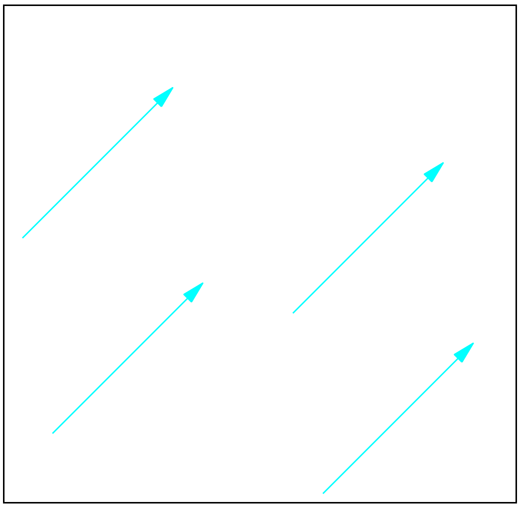


Figura 2: Segmentos orientados representando o mesmo vetor

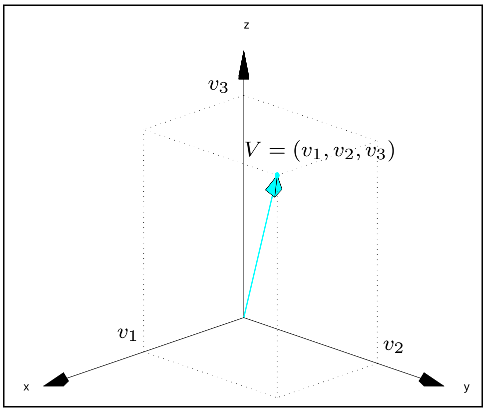


Figura 3: As componentes de um vetor no espaço

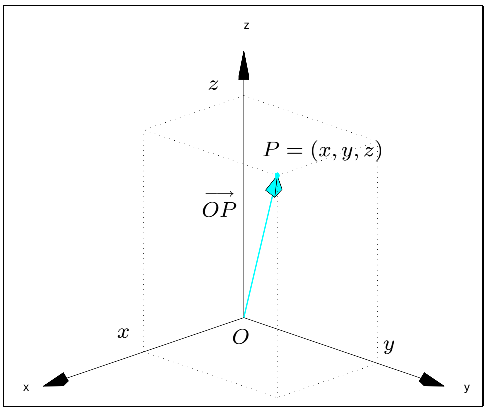


Figura 4: As coordenadas de P são iguais as componentes de $\overrightarrow{OP}$

Assim, as coordenadas de um ponto P são iguais as componentes do vetor $\overrightarrow{OP}$ que vai da origem do sistema de coordenadas ao ponto P. O **vetor nulo** é aquele em que todas as suas componentes são iguais a zero, $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

3 Soma de Vetores e Multiplicação por Escalar

Vamos definir a **soma de vetores** e a **multiplicação de vetor por escalar** em termos das componentes. Pode-se mostrar que estas definições independem do sistema de coordenadas ortogonal usado (ver por exemplo [3]).

- Se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$, então a adição de V com W é dada por

$$V + W = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3);$$

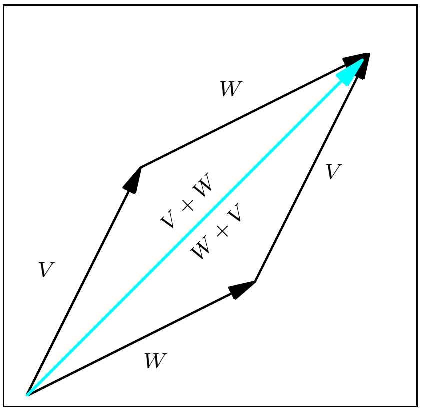


Figura 5: $V + W = W + V$

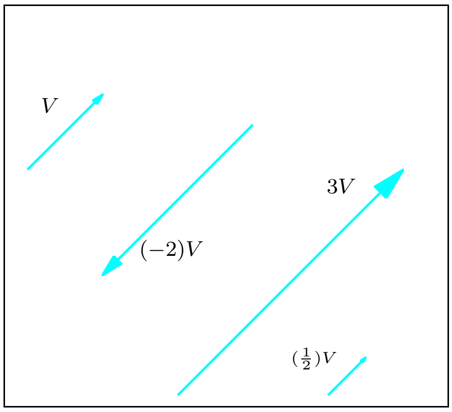


Figura 6: Multiplicação de vetor por escalar

- Se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e α é um escalar, então a multiplicação de V por α é dada por

$$\alpha\, V = (\alpha\, v_1, \alpha\, v_2, \alpha\, v_3).$$

Pode-se verificar que, geometricamente a soma de dois vetores, $V + W$, está na diagonal do paralelogramo determinado por V e W quando eles estão representados com a mesma origem. A multiplicação por escalar, αV, é um vetor que tem a mesma direção e mesmo sentido de V, se $\alpha > 0$ e $V \neq \vec{0}$; mesma direção e sentido contrário ao de V, se $\alpha < 0$ e $V \neq \vec{0}$ e é o vetor nulo caso contrário. Dizemos que dois vetores não nulos são **paralelos** ou **colineares** se eles têm a mesma direção.

Assim, podemos concluir

Proposição 1. *Dois vetores não nulos, V e W, são paralelos se, e somente se, um é um **múltiplo escalar** do outro (isto é, $V = \alpha W$ ou $W = \alpha V$).*

Além disso, um resultado análogo é válido para três vetores.

Proposição 2. *Três vetores U, V e W são **coplanares**, (isto é, estão no mesmo plano, se representados com a mesma origem) se, e somente se, um dos vetores é uma soma de múltiplos escalares dos outros dois.*

Demonstração. Se um dos vetores é uma soma de múltiplos escalares, então das observações feitas acima, eles são coplanares. Por outro lado, suponha que eles são coplanares e quaisquer dois deles não são paralelos. Tomando representantes de U, V

e W com a mesma origem A, sejam B, C e D as extremidades de U, V e W respectivamente. Os pontos A, B, C e D, estão num mesmo plano. Então a reta paralela a AC passando por D corta a reta determinada por AB em um ponto B'. Analogamente a reta paralela a AB passando por D corta a reta determinada por AC em um ponto C'. Sejam α e β tais que $\overrightarrow{AC'} = \alpha\, \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB'} = \beta\, \overrightarrow{AB}$. Como $AB'DC'$ é um paralelogramo, então $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AB'}$, ou seja, $\overrightarrow{AD} = \alpha\, \overrightarrow{AC} + \beta\, \overrightarrow{AB}$. Se dois deles são paralelos, então claramente um deles é uma soma de múltiplos escalares dos outros, neste caso com um dos escalares igual a zero. $\square$

Um outro resultado interessante é o seguinte

Proposição 3. *Três vetores $U = (u_1, u_2, u_3), V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$ são coplanares se, e somente se,*

$$\det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = 0. \tag{1}$$

Demonstração. Se os vetores são coplanares, vimos acima que então um deles é uma soma de múltiplos escalares dos outros dois e portanto o determinante em (1) é igual a zero. Por outro lado suponhamos que o determinante em (1) seja igual a zero. A matriz em (1) é a transposta da matriz do sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} u_1 x & + & v_1 y & + & w_1 z & = & 0 \\ u_2 x & + & v_2 y & + & w_2 z & = & 0 \\ u_3 x & + & v_3 y & + & w_3 z & = & 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

Agora, $x = \alpha$, $y = \beta$ e $z = \gamma$ é uma solução deste sistema se, e somente se,

$$\alpha(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3) + \gamma(w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 0). \tag{3}$$

Se o determinante em (1) é igual a zero, então o sistema (2) tem infinitas soluções. Portanto, existem α, β e γ não todos nulos tais que a equação vetorial (3) é satisteita. Por exemplo, se $\alpha \neq 0$, então

$$(u_1, u_2, u_3) = -\frac{\beta}{\alpha}(v_1, v_2, v_3) - \frac{\gamma}{\alpha}(w_1, w_2, w_3),$$

ou seja, o primeiro vetor é uma soma de múltiplos escalares dos outros dois. Analogamente, se $\beta \neq 0$ ou $\gamma \neq 0$, então o segundo ou o terceiro vetor é uma soma de múltiplos escalares dos outros dois. Mas, isto significa que os vetores são coplanares. $\square$

4 Produto Escalar

O **comprimento** de um vetor $V = (v_1, v_2, v_3)$ é denotado(a) por $||V||$. Segue do Teorema de Pitágoras que o comprimento de um vetor é pode ser calculado como

$$||V|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}. \tag{4}$$

(verifique usando a Figura 7).

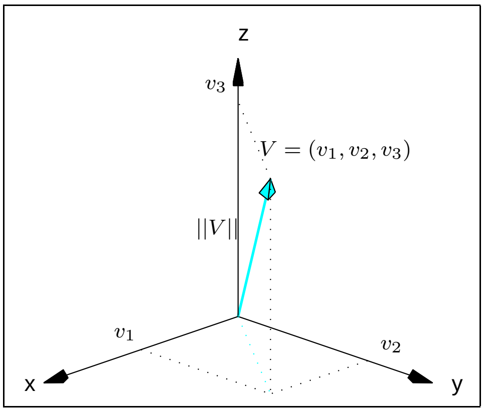


Figura 7: O comprimento de um vetor $V = (v_1, v_2, v_3)$

Vamos definir, agora, um produto entre dois vetores, cujo resultado é um escalar. Por isso ele é chamado **produto escalar**. Este produto tem aplicação, por exemplo, em Física: o trabalho realizado por uma força é o produto escalar do vetor força pelo vetor deslocamento, quando a força aplicada é constante.

O **produto escalar** ou **interno** de dois vetores $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$ é definido por

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3.$$

Pode-se mostrar que esta definição independe do sistema de coordenadas ortogonal usado (ver por exemplo [3]).

Proposição 4. *Sejam U, V e W vetores e α um escalar. São válidas as seguintes propriedades:*

1. $U \cdot V = V \cdot U$;
2. $U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$;
3. $\alpha(U \cdot V) = (\alpha U) \cdot V = U \cdot (\alpha V)$;
4. $V \cdot V = ||V||^2 \geq 0$, *para todo* V *e* $V \cdot V = 0$ *se, e somente se,* $V = \vec{0}$.

A demonstração destas propriedades pode ser encontrada, por exemplo, em [3].

O ângulo entre dois vetores não nulos, V e W, é definido pelo ângulo θ determinado por V e W que satisfaz $0 \leq \theta \leq \pi$, quando eles estão representados com a mesma origem.

Quando o ângulo θ entre dois vetores V e W é reto ($\theta = 90^o$), ou um deles é o vetor nulo, dizemos que os vetores V e W são **ortogonais** ou **perpendiculares entre si**.

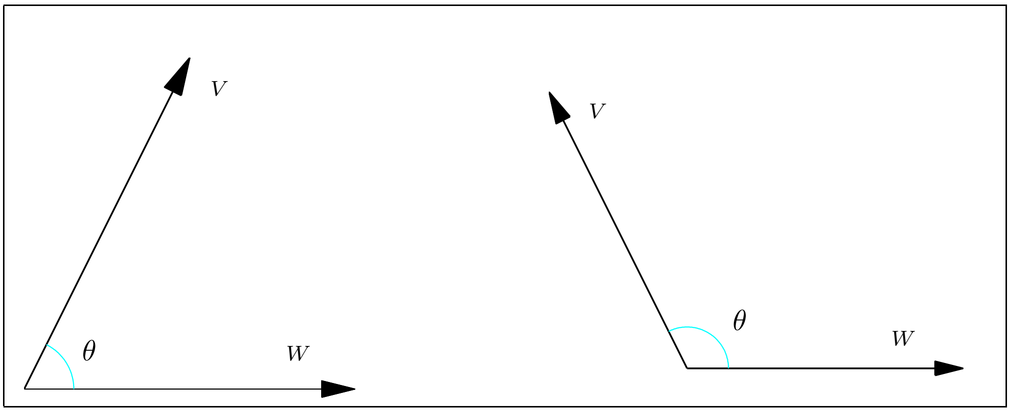


Figura 8: Ângulo entre dois vetores

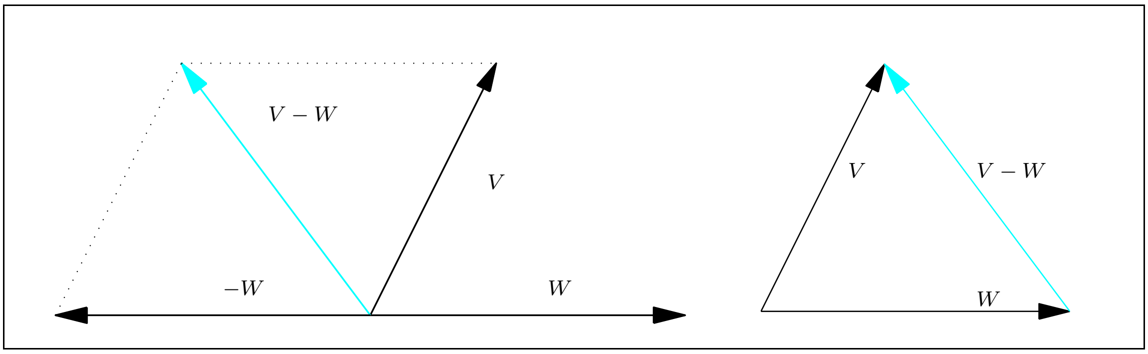


Figura 9: A diferença $V - W$

Sejam V e W dois vetores não nulos e θ o ângulo entre eles. Pela lei dos cossenos,

$$||V - W||^2 = ||V||^2 + ||W||^2 - 2\,||V||\,||W||\cos\theta.$$

Por outro lado,

$$||V - W||^2 = (V - W)\cdot(V - W) = ||V||^2 + ||W||^2 - 2\,V\cdot W.$$

De onde segue que o produto escalar ou interno entre eles pode ser escrito como

$$V \cdot W = ||V||\,||W||\cos\theta.$$

Portanto, dois vetores V e W não nulos, são ortogonais se, e somente se, $V \cdot W = 0$.

Proposição 5. *Se um vetor X é ortogonal a três vetores não coplanares, então*

$$X = \vec{0}.$$

Demonstração. Sejam $U = (u_1, u_2, u_3), V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$ vetores não coplanares. Se $X = (x, y, z)$ é ortogonal a eles, então, pela definição de produto escalar x, y e z satisfaz o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} u_1 x & + & u_2 y & + & u_3 z & = & 0 \\ v_1 x & + & v_2 y & + & v_3 z & = & 0 \\ w_1 x & + & w_2 y & + & w_3 z & = & 0 \end{array}\right.$$

Mas, como os vetores são não coplanares, então por (1) o determinante da matriz do sistema é diferente de zero o que implica que a única solução do sistema é $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$. $\square$

5 Equação do Plano

Existe uma analogia entre uma reta no plano e um plano no espaço. No plano, a equação de uma reta é determinada se forem dados sua inclinação e um de seus pontos. No espaço, a inclinação de um plano é dada por um vetor perpendicular a ele e a equação de um plano é determinada se são dados um vetor perpendicular a ele e um de seus pontos.

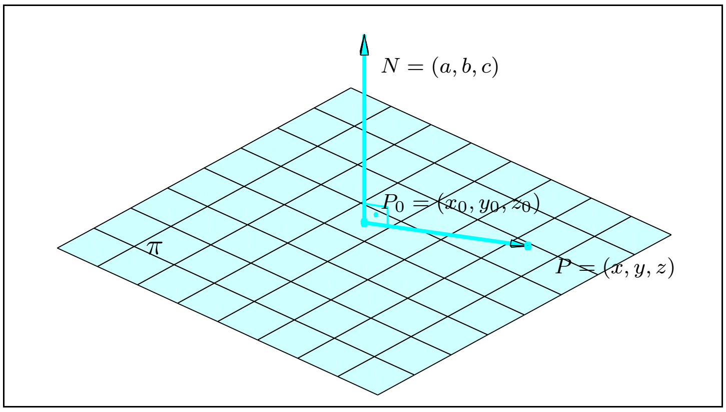


Figura 10: Plano perpendicular a $N = (a, b, c)$ e que passa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

Proposição 6. *A equação de um plano π que passa por um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é perpendicular ao vetor $N = (a, b, c)$ é*

$$ax + by + cz + d = 0\,, \tag{5}$$

onde $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$. A equação (5) é chamada ***equação geral*** *do plano π e o vetor N é chamado* ***vetor normal*** *do plano.*

Demonstração. Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plano π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ for perpendicular ao vetor N, ou seja,

$$N \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0\,. \tag{6}$$

Como, $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, a equação (6) pode ser reescrita como

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0, \quad \text{ou seja,}$$

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0\,.$$

□

Exemplo 1. Vamos encontrar a equação do plano π que passa pelo ponto $P_0 = (3, -1, 7)$ e é perpendicular ao vetor $N = (4, 2, -5)$. Da proposição anterior, a equação do plano é da forma

$$ax + by + cz + d = 0\,,$$

onde os coeficientes de x, y e z são as componentes do vetor normal, ou seja, $a = 4$, $b = 2$ e $c = -5$. Assim, a equação de π é da forma

$$4x + 2y - 5z + d = 0\,.$$

Para determinar o coeficiente d, basta usarmos o fato de que $P_0 = (3, -1, 7)$ pertence a π e um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, ele satisfaz a sua equação, ou seja,

$$4 \cdot 3 + 2(-1) - 5 \cdot 7 + d = 0\,.$$

De onde tiramos que $d = -12 + 2 + 35 = 25$. Finalmente, a equação do plano π é

$$4x + 2y - 5z + 25 = 0\,.$$

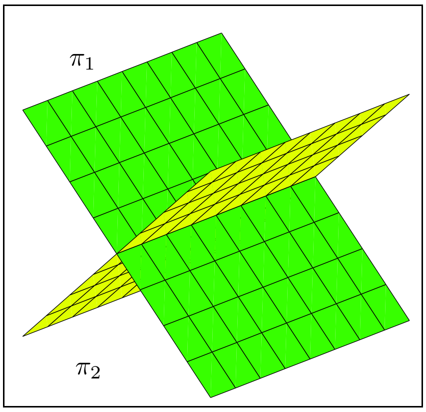


Figura 11: Dois planos que se interceptam segundo uma reta

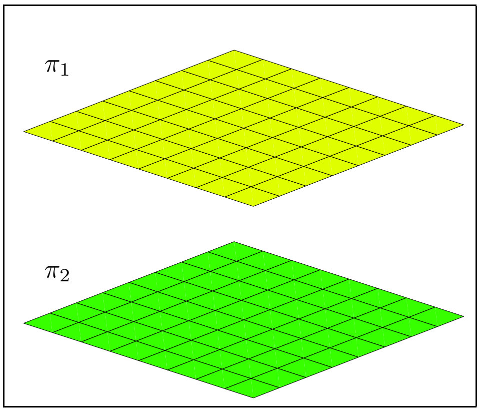


Figura 12: Dois planos paralelos

6 Posições Relativas de Dois Planos

Sejam dois planos $\pi_1 : \ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 : \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ quaisquer. Se os seus vetores normais $N_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $N_2 = (a_2, b_2, c_2)$ **não** são paralelos, então os planos são concorrentes (Figura 11). Se os seus vetores normais são paralelos, ou seja, se $N_2 = \alpha N_1$, então os planos são paralelos distintos (Figura 12) ou coincidentes. Além de paralelos, eles são coincidentes se, e somente se, todo ponto que satisfaz a equação de π_1, satisfaz também a equação de π_2.

Suponha que π_1 e π_2 são coincidentes, com $N_2 = \alpha N_1$, então
$a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = \alpha a_1x+\alpha b_1y+\alpha c_1z+d_2 = \alpha(a_1x+b_1y+c_1z)+d_2 = \alpha(-d_1)+d_2 = 0.$
Portanto, $d_2 = \alpha d_1$ e as equações de π_1 e π_2 são proporcionais. Reciprocamente, se as equações de π_1 e π_2 são proporcionais, então claramente os dois planos são coincidentes. Portanto, dois planos são coincidentes se, e somente se, além dos vetores normais serem paralelos, as suas equações são proporcionais.

7 Posições Relativas de Três Planos

Consideremos três planos π_1, π_2, e π_3 dados pelas equações:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \pi_1 : & a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ \pi_2 : & a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ \pi_3 : & a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{array} \right. \tag{7}$$

Os vetores $N_i = (a_i, b_i, c_i)$ são normais aos planos π_i, para $i = 1, 2, 3$. Os três vetores são coplanares ou não são coplanares.

1. Se os vetores N_1, N_2 e N_3 **não** são coplanares, então vamos mostrar que os planos se interceptam dois a dois segundo retas que se interceptam em um ponto. As retas $r = \pi_1 \cap \pi_2$ e $s = \pi_1 \cap \pi_3$ estão no plano π_1. Vamos mostrar que elas são concorrentes. Sejam A e B dois pontos distintos da reta r. O vetor $\overrightarrow{AB}$ é

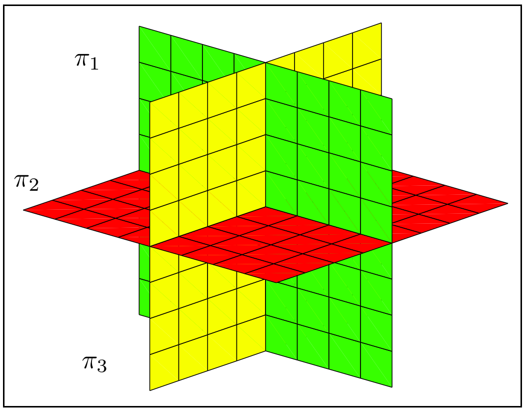


Figura 13: Três planos que se interceptam segundo um ponto

perpendicular a N_1 e a N_2. Se as retas r e s fossem paralelas, então $\overrightarrow{AB}$ seria perpendicular também a N_3, ou seja, $\overrightarrow{AB}$ seria perpendicular a três vetores não coplanares o que implicaria que $\overrightarrow{AB}= \vec{0}$. Os vetores N_1, N_2 e N_3 não são coplanares se, e somente se,

$$\det(A) \neq 0,$$

onde $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$. Neste caso o sistema tem solução única (Figura 13).

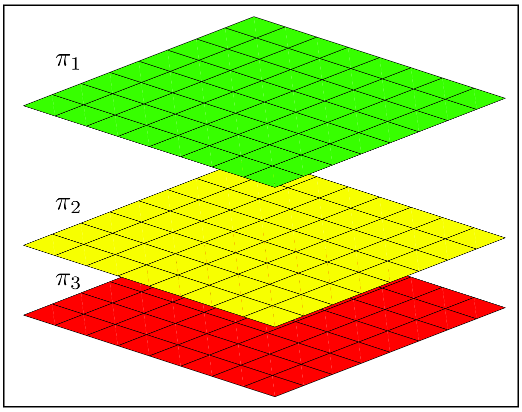


Figura 14: Três planos paralelos

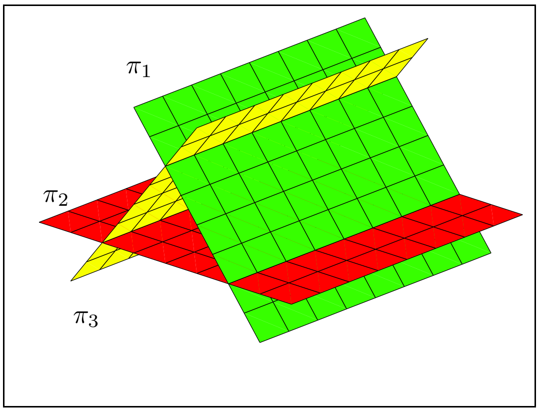
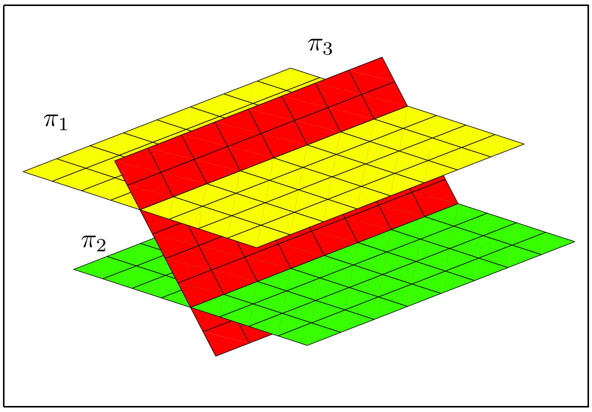


Figura 15: Planos interceptando-se 2 a 2

2. Se os três vetores normais são coplanares, então pode ocorrer uma das seguintes situações:

   (a) Os vetores normais são paralelos, ou seja, $N_1 = \alpha N_2$, $N_1 = \beta N_3$ e $N_2 = \gamma N_3$. Neste caso, os planos são paralelos.

   Se além disso, exatamente duas das equações são proporcionais, então exatamente dois planos são coincidentes e o sistema não tem solução. Se



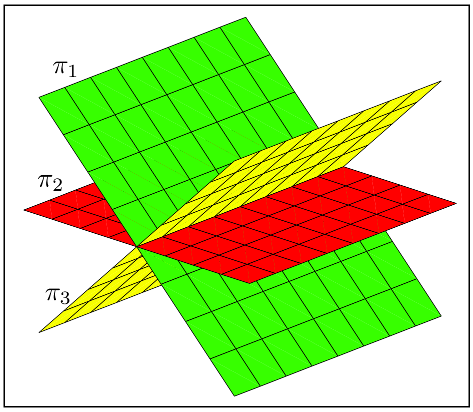


Figura 16: Três planos, sendo 2 paralelos

Figura 17: Reta interseção de 3 planos

as três equações são proporcionais, então os três planos são coincidentes e o sistema tem infinitas soluções. Se não ocorre nenhuma destas situações, os planos são paralelos e distintos e o sistema não tem solução (Figura 14).

(b) Exatamente dois vetores normais são paralelos, ou seja, vale uma, e somente uma, equação entre: $N_1 = \alpha N_2$, $N_1 = \alpha N_3$, $N_2 = \alpha N_3$. Neste caso, exatamente dois planos são paralelos.

Se além de exatamente dois vetores normais serem paralelos, as equações correspondentes forem proporcionais, então dois planos são coincidentes e o terceiro corta os dois segundo uma reta. Neste caso o sistema tem infinitas soluções. Se isto não acontece, então os planos paralelos são distintos e o sistema não tem solução (Figura 16).

(c) Os vetores normais são coplanares e quaisquer dois vetores normais não são paralelos, ou seja, $\det(A) = 0$ e quaisquer dois vetores normais não são múltiplos escalares. Neste caso, quaisquer dois planos se interceptam segundo retas que são paralelas. Com estas condições podem ocorrer dois casos: **os três planos se interceptem segundo uma reta**, (Figura 17) ou **os planos se interceptem, dois a dois, segundo retas diferentes** (Figura 15). No primeiro caso, o sistema (7) tem infinitas soluções. No segundo caso, o sistema não tem solução.

Referências

[1] Howard Anton and Chris Rorres. *Álgebra Linear com Aplicações*. Bookman, São Paulo, 8a. edição, 2000.

[2] Elon L. Lima. *Coordenadas no Espaço*. SBM, Rio de Janeiro, 1993.

[3] Reginaldo J. Santos. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2000.