Tubos em Volta de Curvas

Reginaldo J. Santos
DMat-ICEx-UFMG

22 de junho de 2007

Seja $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma curva no espaço. O vetor unitário (de comprimento igual a 1) tangente à curva é obtido por

$$T(t) = \frac{X'(t)}{||X'(t)||}$$

O vetor

$$\overline{N(t)} = X''(t) - (X''(t) \cdot T(t))T(t)$$

é ortogonal a $T(t)$ e o vetor unitário

$$N(t) = \frac{\overline{N(t)}}{||\overline{N(t)}||}.$$

é chamado **vetor normal** à curva. O vetor

$$B(t) = T(t) \times N(t)$$

é unitário e é chamado **vetor binormal** à curva. Os vetores $T(t)$, $N(t)$ e $B(t)$ formam uma base ortonormal em todos os pontos da curva. Eles formam o chamado **triedro de Serret-Frenet**.

Exemplo 1. Para a circunferência $X(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\,t, 0)$, os vetores normal e binormal são dados por

$$N(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t), 0) \text{ e } B(t) = (0, 0, 1),$$

respectivamente.

1 Faixas

Podemos obter uma faixa ao longo de uma curva $X(t)$ por

$$X(u,v) = X(u) + \frac{v}{2}Y(u), \ -1 \leq v \leq 1,$$

com

$$Y(u) = \alpha(u)N(u) + \beta(u)B(u),$$

em que $N(t)$ e $B(t)$ são os vetores normal e binormal da curva. A largura da faixa será dada por $\sqrt{\alpha(t)^2 + \beta(t)^2}$.

Exemplo 2. A **Faixa de Möbius** pode ser obtida usando como curva a circunferência $X(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\,t, 0)$. Neste caso $N(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t), 0)$, $B(t) = (0, 0, 1)$. E $\alpha(t) = \cos(\frac{t}{2})$, $\beta(t) = \mathrm{sen}(\frac{t}{2})$.

$$X(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(u)(R + \frac{v}{2}\cos(\frac{u}{2})) \\ \mathrm{sen}(u)(R + \frac{v}{2}\cos(\frac{u}{2})) \\ \frac{v}{2}\,\mathrm{sen}(\frac{u}{2}) \end{pmatrix}$$

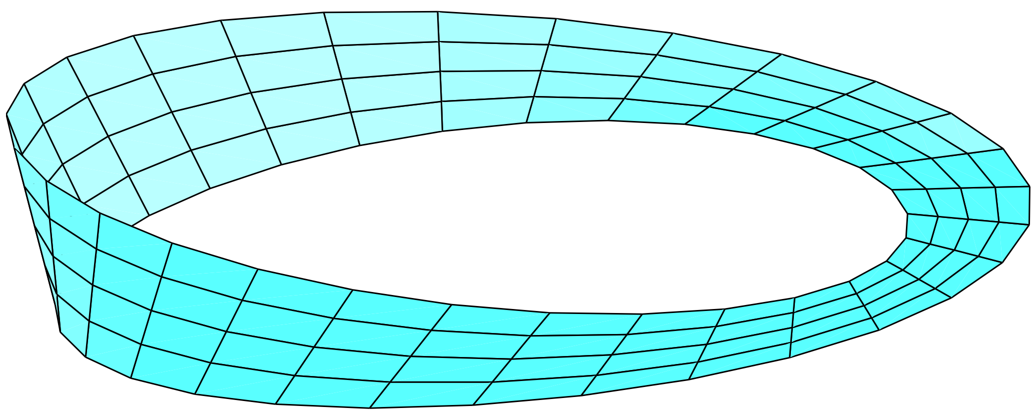

Figura 1: Faixa de Möbius

2 Tubos

Dada uma curva $X(t)$, um tubo em volta desta curva, cuja seção transversal é a curva plana $Y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ é obtido com a parametrização

$$X(u,v) = X(u) + y_1(v)N(u) + y_2(v)B(u),$$

em que $N(t)$ e $B(t)$ são os vetores normal e binormal da curva.

Exemplo 3. O **toro** é um tubo em volta da circunferência

$$X(t) = (R\cos(t), R\,\text{sen}(t), 0),$$

em que a seção transversal é também uma circunferência $Y(t) = (r\cos t, r\,\text{sen}\,t)$. Neste caso $N(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), 0)$, $B(t) = (0, 0, 1)$ e assim o toro tem parametrização

$$X(u,v) = \begin{pmatrix} R\cos(u) + r\cos(u)\cos(v) \\ R\,\text{sen}(u) + r\cos(u)\,\text{sen}(v) \\ r\,\text{sen}(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(u)(R + r\cos(v)) \\ \text{sen}(u)(R + r\cos(v)) \\ r\,\text{sen}(v) \end{pmatrix}$$

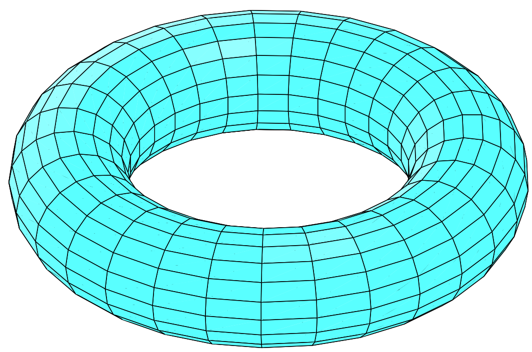

Figura 2: Toro

3 Tubos com Torção

Trocando-se $N(u)$ e $B(u)$ na equação do tubo por

$$U_1(u) = \cos(\frac{u}{2})N(u) + \text{sen}(\frac{u}{2})B(u),$$

$$U_2(u) = -\,\text{sen}(\frac{u}{2})N(u) + \cos(\frac{u}{2})B(u),$$

respectivamente, obtemos

$$X(u,v) = X(u) + y_1(v)U_1(u) + y_2(v)U_2(u).$$

Exemplo 4. A **Imersão em Oito da Garrafa de Klein** pode ser obtida como um tubo com torção em volta da circunferência $X(t) = (R\cos(t), R\,\mathrm{sen}(t), 0)$, usando como seção transversal o "oito" $Y(t) = (r\,\mathrm{sen}(t), r\,\mathrm{sen}(2t))$

$$\begin{aligned} X(u,v) &= \begin{pmatrix} R\cos(u) + r(\cos(\frac{u}{2})\,\mathrm{sen}(v) - \mathrm{sen}(\frac{u}{2})\,\mathrm{sen}(2v))\cos(u) \\ R\,\mathrm{sen}(u) + r(\cos(\frac{u}{2})\,\mathrm{sen}(v) - \mathrm{sen}(\frac{u}{2})\,\mathrm{sen}(2v))\cos(u) \\ r(\mathrm{sen}(\frac{u}{2})\,\mathrm{sen}(v) + \cos(\frac{u}{2})\,\mathrm{sen}(2v)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(u)(R + r(\cos(\frac{u}{2})\,\mathrm{sen}(v) - \mathrm{sen}(\frac{u}{2})\,\mathrm{sen}(2v))) \\ \mathrm{sen}(u)(R + r(\cos(\frac{u}{2})\,\mathrm{sen}(v) - \mathrm{sen}(\frac{u}{2})\,\mathrm{sen}(2v))) \\ r(\mathrm{sen}(\frac{u}{2})\,\mathrm{sen}(v) + \cos(\frac{u}{2})\,\mathrm{sen}(2v)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

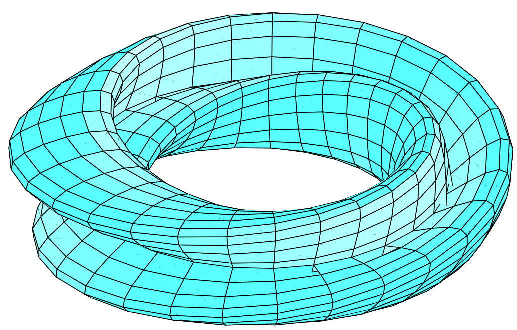

Figura 3: Imersão em Oito da Garrafa de Klein

4 Nós em Volta de Tubos

Fazendo $u = t$ e $v = \frac{q}{p}t$, com p e q primos entre si nas equações paraméricas de um tubo obtemos uma família de curvas.

Exemplo 5. Para o toro obtemos a família de nós

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos(t)(R + r\cos(\frac{q}{p}t)) \\ \mathrm{sen}(t)(R + r\cos(\frac{q}{p}t)) \\ r\,\mathrm{sen}(\frac{q}{p}t) \end{pmatrix},\ 0 \le t < 2p\pi,$$

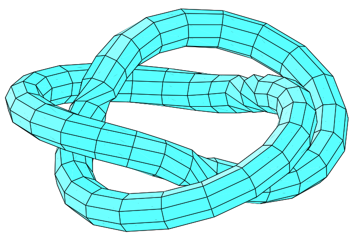

Figura 4: Nó $(p, q) = (2, 3)$ em volta do Toro

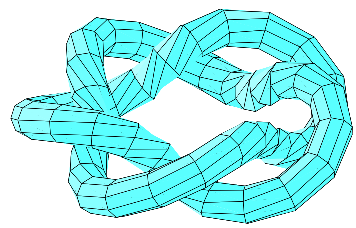

Figura 5: Nó $(p, q) = (2, 5)$ em volta do Toro

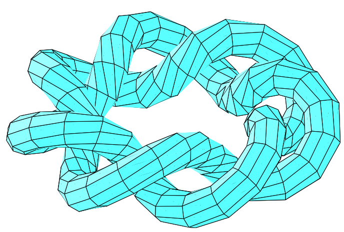

Figura 6: Nó $(p, q) = (2, 7)$ em volta do Toro

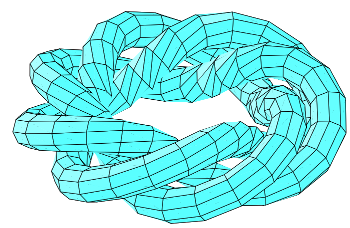

Figura 7: Nó $(p, q) = (3, 7)$ em volta do Toro